GIDEONIS JANI VERDAM,

MYDRECHTO — BATAVUS,

MATHESEOS AC PHILOSOPHIAE NATURALIS IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA CANDIDATI,

COMMENTATIO

AD

QUAESTIONEM MATHEMATICAM, A NOBILISSIMO MATHEMATICARUM AC PHYSICARUM DISCIPLINARUM ORDINE IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA A. MDCCCXXIII PROPOSITAM:

Quaestio: *Theoria de* MAXIMIS *et* MINIMIS *explicetur et variis exemplis illustretur.*

QUAE PRAEMIUM REPORTAVIT D. VIII. MENSIS FEBRUARII A. MDCCCXXIV.

COMMENTATIO
AD
QUAESTIONEM MATHEMATICAM.

PRAEFATIO.

Priusquam hanc commentationem judicio vestro, VIRI CLARISSIMI! submissurus sim, breviter indicare liceat, quaenam sit ratio, quam, in ea conscribenda, secutus sum; ut videatis, in quantum consilio satisfeci, atque ut ipse, quantum decet, me defendam in iis, quibus a quaestionis indole decessisse viderer.

In quaestione posita primum postulatur, Theoriam de *maximis* et *minimis* explicare; ea autem explicata, varia adjicere exempla, quibus illustretur.

Quod ad theoriam de *maximis* et *minimis*, eam praecipue versari intelligo in indagatione valorum maximorum et minimorum, quos functio quaevis acquirere potest. — Haec autem indagatio, quamquam in omni functionum genere iisdem nitatur fundamentis, tamen in omnibus, iisdem non efficitur regulis. Omnes enim functiones, quae habent formam definitam, ut functiones Algebraicae et transcendentales, eadem tractantur methodo, cum earum maximi aut minimi valores detegendi sunt. Haec autem Methodus, diversa est ab ea, quâ inveniuntur maxima et minima functionum indefinitarum, ut functiones integrales, quae gaudent formâ, generali quidem, sed indefinitâ. — Eaque methodi diversitas posita est in differentia naturae calculorum, quibus ad scopum pervenimus; cum prima methodus efficiatur ope calculi differentialis, altera autem calculo variationum instituatur.

Ratio igitur, quam secutus sum, prorsus analytica est, et ipsa commentatio, eam ob causam, divisa est in duas partes praecipuas; cum prima contineat *theoriam de* maximis *et* minimis *functionum definitarum;* altera autem *ad* maxima minimaque *functionum indefinitarum referatur.*

Verum enim vero, cum maximorum et minimorum theoria functionum algebraicarum ac transcendentalium, vulgo nuncupetur nomine, *Theoriae de* maximis *et* minimis, incer-

tum mihi fuit, utrum expositio maximorum et minimorum alterius generis functionum, quaestione postuletur, nec ne? Hanc igitur partem omittere non potui, quippe, si quaeratur, quaestioni non satisfacio, cum omittam: et quamquam, si non postuletur, haec pars sit supervacua, tamen hoc adeo vituperetur, ut eam ob causam mea commentatio (*ceteris paribus*) aliis postponatur, non est quod credere ausim.

Quod autem ad hujus partis naturam, ardua sane et difficilis mihi fuit ejus expositio. Pauca tantum de hac materia dixi: etenim ipsius abstracta ratio, ejusmodi est, quae a me, ingenio haud praestanti, ab omni parte nondum est intellecta aut perspecta: deinde, ne nimis longa sit commentatio, brevis esse debui: et, etiamsi nulla re impedirer, tamen, omnia quae dicenda sunt, proferre certo non poteram, quoniam ob materiae novitatem et magnitudinem, ea quae conscripta inveniuntur, omni perspicuitate, (ut mihi saltem videtur) nondum sunt exposita, atque in multis, multa etiam desiderantur.

Quod ad expositionem theoriae de maximis et minimis functionum definitarum, in hac, si quaedam omiserim, profecto haud multa esse credo; perspicuitatis rationem, ut plurimum habui, quin etiam sperare possim, fore ut non prorsus displiceat. Nam argumenti intellectus admodum difficilis non fuit; quod defuit ex celeberrimorum Mathematicorum scriptis mihi suppeditabatur: illique optimi fuerunt ductores.

Haud facilis autem erat Theoriae illustratio; non quidem regularum applicatio erat difficilis, sed exemplorum electio: namque ad diversos casus illustrandos, atque ad dubia levanda, talia exempla, quibus id optime efficitur, statim in promptu non sunt. Exempla, quae adtuli, omnia fere ex figurarum geometricarum proprietatum copiâ desumta sunt, atque, si ista electione lapsus sum, non est quod miror. Etenim cum theoriae illustratio desideretur in variis exemplis, perspicuum est, istam illustrationem meliorem esse, qua theoriae usus non modo monstratur in ipsa Mathesi, sed praecipue etiam in talibus scientiis, quibus illa ad hominum commoda atque ad omnes res utiles applicatur. Opus igitur est, ut breviter causas ponam, ob quas, talia exempla inprimis non elegi.

Tenendum autem omnino est, theoriae illustrationem versari in ejus applicatione ad diversas functiones, variosque casus pendere a variis functionum formis.

Hoc posito, exempla, ex *scientiis Physico-Mathematicis* desumta, omisi, quoniam praecipua, eaque notissima, quamvis facillima ratione solvuntur, ad easdem simplices functionum formas ducunt, ideoque eidem casui subjecta sunt, qui casus, ob functionum formas simplices, vel maxime generalis est (1).

Deinde adsunt Problemata in quibus theoria de maximis et minimis, pulchro quidem modo illustratur, quae autem, quod ad principia quibus ad functionem pervenire oportet,

(1) Praecipua istiusmodi exempla inveniuntur in opere quodam, quod inscribitur *Calculi Differentialis et Integralis institutio* auctore Makone, Vindobonae 1768.

tet, aut difficiliora sunt, aut ob varias circumstantias, quibus adstringuntur, longiora, quam ut rite tanquam exempla inserviant: hujus generis est problema, in quo agitur *de solido minimae resistentiae*, scilicet de solido, quod, fluido immersum, talem habeat superficiem, quâ in motu minima resistentia afficitur, seu minimam amittit velocitatem (2).

Denique adsunt etiam problemata quae ad theoriam illustrandam, inservire quidem possunt, sed quorum solutiones, ex aliis principiis, absque Theoriae regulis, facilius, et elegantius procedunt. Sic v. c. rogetur, *si vires quamplures in systema quoddam corporum, invariabili modo agant, invenire, quibusnam casibus harum virium actiones praebeant maximam aut minimam vim vivam.*

In Mechanica docetur, hoc locum habere in aequilibrii positione (3), prouti centrum gravitatis, in situ infimo aut supremo invenitur, idque l. c. facile probatur; idem autem problema, si convenienter Theoriae de maximis et minimis, solvitur, magno labore adstrictum est. Talia autem exempla in variis Matheseos, tum purae tum applicatae partibus, vel maxime occurrunt.

Atque hae sunt praecipue causae, ob quas exempla, ex Matheseos fonte potius hausi. Negare non possum, ea fortasse ex *scientiis Physico Mathematicis* desumi posse, sed ad ipsa componenda aut invenienda meae vires tenuiores sunt.

Pluribus certo vitiis laborat commentationis ratio, sed ab his, ipse me defendere non possum. Praemii reportandi spes me incitavit ad tentandum, quid vires in certamine valerent: in quo, is praemio ornatur, non qui perfecta, sed qui optima diligentiae specimina praebuit: hanc ob causam et ego in arenam descendere poteram, quoniam assiduus labor et firma voluntas, tantum saepe valent, quantum optimae ingenii facultates.

Fretus igitur vestrâ indulgentiâ V. V. C. C. meorum studiorum specimina ad dijudicandum vobis trado.

(2) Vid. Bezout *Cours de Mathematiques*, Tom. V. p. 73. Stone, *Analyse des infiniments petits, servant de suite aux infiniments petits du Marquis de* l'Hopital, Probl. X. pag. 146. Paris 1735. Sed imprimis conferri merentur, *Memoires de Mathematique et de Physique presentés a l'Acad. Royal des sciences, par des savans etrangers*, Tom. III. p. 638.

(3) Vid. Ill. Lagrange, *Mecanique Analytique*, Tom. I. Sect. III. §. V. p. 66 et 68.

SECTIO PRIMA.

THEORIA DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM DEFINITARUM, SIVE ALGEBRAICARUM SIVE TRANSCENDENTALIUM.

INTRODUCTIO.

1. Omne Matheseos consilium in eo versatur, ut nexus, qui adest inter omnes quantitates ejusdem generis, rite indagetur, et menti proponatur; id est, ut innotescat lex seu modus, quo hae quantitates a se invicem pendent. Lex talis igitur monstrat, quid fiunt hae quantitates, si illae mutantur.

Omnis autem quantitatis mutatio, ejusdem est accretio vel diminutio: accrescente aut decrescente igitur hâc quantitate, accrescunt aut decrescunt, aut vice versâ, aliae quantitates, eaque mutatio fit secundum legem, cui omnes, utpote inter se connectae, obedire debent. Ex varia legis illius constitutione, varia etiam erit ista mutatio: sed quoquo modo fiat, duo praecipue mutationis genera observari merentur.

Etenim, vel nullis limitibus circumscripta esse potest; id est ad infinitum augeri aut diminui potest, vel adsunt limites, quos excedere nequeunt quantitates, dum secundum datam legem mutentur. Sic, si quaedam quantitas, secundum legem praescriptam accrescat aut diminuatur, ejusmodi illa lex esse potest, ut ad certum gradum accrescat aut decrescat, a quo autem, si ulterius progrediatur, decressere aut accrescere incipiat. In talibus limitibus igitur ista quantitas evadit maxima aut minima, omnium quantitatum, quae ex eadem lege, simili modo, generantur: et ratio sive potius Theoria, quae perducit ad cognitionem horum limitum, id est ubi sint, vel quando adsint, dicitur, *Theoria de Maximis et Minimis.*

2. Cum Analysis sit instrumentum, quod omnium rerum Mathematicarum nexum, concinne menti proponat, omnisque rei partes quasi colligat, mirum non est, veteres Mathematicos haud multum in maximorum et minimorum theoria profecisse. Quae de maximis et minimis ab illis tradita sunt, occurrunt utpote propositiones geometricae, quae ad figuras respiciunt, quae vulgo Isoperimetricae vocantur; id est, ut inter omnes figuras, quae easdem proprietates communes habent, maximo quodam aut minimo gaudeant: sed theoria generalis, qua maximi aut minimi proprietates figurarum detegi possunt, illis non constabat.

3. Ta-

3. Talis autem Theoriae prima fundamenta posuit celeberrimus Cartesius. Is enim, cum post Algebram inventam, primus fuerit, qui hanc doctrinam curvarum theoriae applicaverit (1), viam aperuit, quam si ingrediamur, vinculum detegimus, quo quantitates inter se connexae esse possunt; qui connexus simul nobis monstrat, quanam lege mutari possint, et quibusnam limitibus circumscripta sint: neminem enim, studiis Mathematicis initiatum, non subit, modum, quo quantitates a se invicem pendent, rite proponi posse *aequatione quadam*; sed omnes aequationes (saltem si quantitates, quibus talis aequationis valor mutari potest, et quae ob eam causam variabiles dicuntur, non plus sint numero quam tres) pertinere ad curvas lineas seu superficies, censeri possunt, quarum curvarum seu superficierum abscissae et ordinatae, ipsis aequationis elementis variabilibus proportionales sunt. Igitur si ex ejusmodi aequatione, curva aut superficies curva, ad quam pertinet, constructa sit, ex figura harum curvarum seu superficierum, facile dijudicatur, ubi ordinatae seu abscissae crescant aut decrescant, et ubi crescere aut decrescere desinant, id est ubi sint *maximae* aut *minimae*.

4. Ratio autem, qua, detectis illis limitibus, ex data aquatione, valores illarum abscissarum aut ordinatarum, determinantur, a Mathematicis, qui inde a Cartesii tempore, usque ad calculi differentialis inventionem floruerunt, varie instituta est; quas methodos utpote argumenti historiam, breviter tractare non alienum opinor.

5. Incipiamus igitur ab expositione methodi, quam ipse Cartesius proposuit. Fingatur y, quaedam quantitas, quae accrescit aut decrescit, prouti alia quantitas x, a qua y omnino pendet, mutatur. Sit Lex, secundum quam mutatio fit, functione, seu aequatione quadam $y = \phi(x)$ proposita. Ergo, si sumatur $x = a$, induet y determinatum valorem $y = \phi(a)$, quodsi haec quantitas augeatur, fiatque gradatim $a+i$, $a+2i$, $a+3i$, caetera; obtinemus totidem valores diversos, ipsius y, qui tum accrescent, tum decrescent; idemque eveniet, si x decrescat fiatque $a-i$, $a-2i$ caetera.

Sumatur, *Fig.* 1., in linea OX, $OP' = a$; $Op = a+i$; caet. erigantur perpendicula, cujus longitudines aequales sint, valoribus ipsius y, cum diversis valoribus x convenientibus; tum, si per omnia puncta extrema, Q', q, Q, caet. horum perpendiculorum, ducatur linea curva AB, ista curva manifestat legem secundum quam y mutatur, mutante ipsa x. Haec curva, si habeat maximas aut minimas ordinatas seu abscissas, aderunt et in data functione $y = \phi(x)$, valores maximos aut minimos, qui his abscissis seu ordinatis sunt proportionales. Sit igitur PQ curvae ordinata maxima aut minima, nihil aliud agendum est, quam invenire abscissam OP, huic ordinatae convenientem; hac enim inventa, habetur valor ipsius y maximi aut minimi, si in data functione, valor inventus $OP = x$, substituatur.

Ducatur alicubi linea ab, parallela axi OX, quae secat curvam in duobus punctis Q' et Q'', quo-

(1) Vid. Montucla, *Histoire des Mathematiques*, Tom. II. Liv. II. §. V.

quorum ordinatae, Q'P', et Q"P", ob parallelismum dictum, sunt aequales: ergo in data functione, aderunt duo diversi valores ipsius x, nimirum OP' et OP", quibuscum conveniunt, duae ordinatae aequales. Accedat linea *ab*, sibi parallela, ad punctum Q, idem etiam locum obtinet; ordinatae scilicet aequales *pq*, et *p'q'*, pertinent, ad inaequales abscissas O*p* et O*p'*: hae autem abscissae, quo magis *pq*, et *p'q'* ad se invicem accedant, eo quoque minus discrepunt, et, simulatque, in unam ordinatam maximam aut minimam QP, coalescant, evadunt abscissae O*p* et O*p'* aequales: quam ob causam, si functio $y = \phi(x)$ tanquam aequatio cujusdam gradus spectetur, habebit illa duos saltem radices aequales, si y *maximum* aut *minimum* fieri possit.

6. Ergo Theoria de maximis et minimis a Cartesio reducta est ad resolutionem radicum aequalium cujusdam aequationis. Sed haec Methodus, quamvis ingeniosa, generalis non est; namque sit v. c. *Fig.* 2, AB curva, quae se secet in puncto quodam Q; (quale punctum vocatur *punctum duplex*) si ratio Cartesiana, huic curvae applicetur, quoniam ordinatae aequales *pq*, *p'q'* primum cum diversis abscissis O*p*, O*p'* conveniunt, quae aequales fiunt, ubi *pq* et *p'q'* in PQ coalescunt, obtinemus, et hac ratione valorem ordinatae PQ, qui tamen neque est maximus neque minimus valor (2).

7. Fermatius, Cartesii aequalis, aliam tradidit Methodum de *maximis* et *minimis*, quae tunc temporis perfectior Cartesiana methodo non fuit; at vero in eo praecellit, quod indoles calculi differentialis in ea vel maxime eniteat. Eaque nititur hoc fundamento: si quantitas quaedam maxima aut minima evadat, incrementum aut decrementum in positione proxima, nullum est. Sit enim, *Fig.* 3. AB linea curva, OX abscissarum axis, sit P punctum, ad quod refertur ordinata maxima PQ; quoniam tangens puncti P parallela est axi OX, differentia inter ordinatam PQ, et proximam *pq* adeo erit exigua, ut sine errore negligi possit. Igitur si in aequatione curvae, loco $x = OQ$ ponatur $x + \zeta = Oq$, (ζ denotante quantitatem admodum parvam;) obtinemus valorem ordinatae *qp*, qui, si aequatur valori prioris ordinatae $PQ = y$, prodibit aequatio, in qua ζ^2, ζ^3 caet. si adsint, ob ζ infinite parvam, deleri possunt, quae aequatio igitur inservit ad inveniendam abscissam $OQ = x$, quae convenit, cum tali curvae puncto, cujus ordinata erit *maxima* aut *minima*, utpote a proxima ordinata non differens.

Vitia autem, quibus haec Methodus laborat minora non sunt quam, quae Cartesianae Methodo insunt. Sic *Fig.* 4, in puncto P, curvae AB idem principium valet; tangens puncti P parallela est abscissaram axi OX, et ordinata PQ eam ob causam, fere non dis-

(2) Videatur expositio hujus Methodi Cartesianae apud Montuclam, op. cit. Tom. II. Liv. II. §. IV. quo loco Auctor prolixe loquitur de vitiis, quibus haec Methodus laborat. Ipsa autem Methodus ad varia exempla applicata est, a celeberrimo de l'Hopital in ejus eximio opere, *Analyse des infiniments petits*, Section. X.

discrepit a proxima pq, cum tamen PQ non sit maxima ordinata, neque minima (3).

8. In theoria de maximis et minimis emendanda, etiam excelluerunt nostrates Hugenius, Slusius aliique, qui Theoriam Fermatianam emendare et simpliciori calculo subjicere conati sunt; quod sequenti exemplo illustrabitur.

Detur v. c. haec functio:

$$y = x^3 - ax^2$$

cujus valor maximus aut minimus determinandus sit: secundum Theoriam Fermatianam, loco x scribendum est $x + \zeta$, et aequatio proveniens, aequari debet datae aequationi, qua ratione habemus:

$$x^3 - ax^2 = x^3 + 3x^2\zeta + 3x\zeta^2 + \zeta^3 - ax^2 - 2ax\zeta - a\zeta^2;$$

$$\text{id est, } 3x^2\zeta + 3x\zeta^2 + \zeta^3 - 2ax\zeta - a\zeta^2 = 0.$$

sed quoniam ζ est admodum parva, negligi possunt ζ^2 et ζ^3, respectu ζ, ergo erit:

$$3x^2\zeta - 2ax\zeta = 0$$

quae aequatio, divisa per ζ, praebet

$$3x^2 - 2ax = 0, \text{ unde } x = \tfrac{2}{3}a.$$

si autem haec aequatio finalis, cum data aequatione comparetur, sequenti aliâ regulâ, in qua consistit Hugenii et Slusii emendatio, prodibit: *multiplicetur quisque terminus functionis*

$$y = x^3 - ax^2,$$

cum exponenti ipsius variabilis, *erit*

$$1 . y = 3x^3 - 2ax^2;$$

haec aequatio nihilo aequalis ponatur, *dein dividatur per* x, *eritque*

$$0 = 3x^2 - 2ax.$$

quae operatio idem praebet, ac aequationis differentiatio (4).

9. Denique inter eos qui, via breviori, ad aequationem finalem pervenire conati sunt omittendus non est noster Huddenius, qui singulari et ingenioso modo, illum scopum attigit. Omnem illam Methodum demonstrare longum esset; verbo monere in quo consistit sufficiat, cum plura inveniantur in opere citato clarissimi de l'Hopital, Sect. X, qui ejus convenientiam cum calculo differentiali exponit, variisque exemplis illustrat. Sit v. c.

$$x^3 - ayx + y^3 = 0$$

aequatio, pertinens ad problema quoddam, et rogetur, talem válorem ipsius x invenire, quo y evadat maximum aut minimum. Secundum methodum Hugenii, si y constans consideretur, erit

$$3x^2 - ay = 0$$

aequa-

(3) Cf. Montucla, op. et l. cit. quo, uti et alibi, quamplura annotata sunt de lite, quae de his variis dubiis orta est Fermatium inter et Cartesium.

(4) Cf. Montucla, Op. cit. Liv. II. §. IX.

aequatio, qua iste valor continetur; ex eo deducitur $x = \frac{1}{3}\sqrt{3ay}$, et data aequatio fit:

$$\tfrac{1}{27}\sqrt{(3ay)^3} - \tfrac{1}{3}ay\sqrt{3ay} + y^3 = 0,$$

ex qua valor maximus aut minimus y resolvi debet. Huddenius autem hanc regulam demonstrat; *ordinetur data aequatio secundum potentias ipsius* x, *deinde ejus termini multiplicentur per terminos cujusdam progressionis arithmeticae, quae ita sumatur ut ex data aequatione evanescant termini, quibus remotis, resolutio aequationis, post multiplicationem provenientis, accommodetur. Haec autem aequatio praebebit valores quaesitos.* Sic in exemplo nostro si termini secundum potentias x ordinentur, habemus,

$$x^3 + 0x^2 - ayx + y^3 = 0;$$

multiplicentur termini cum terminis convenientibus progressionis arithmeticae,

3 . 2 . 1 . 0 .

eritque aequatio proveniens

$$3x^3 + 0x^2 - ayx + 0y^3 = 3x^3 - ayx = 0 = 3x^2 - ay,$$

ex qua, uti supra, valor ipsius x determinatur, caetera.

Progressio Arithmetica, pro lubitu sumi potest, ita ut illius ope facillime ad finalem aequationem perveniatur.

10. Et haec sunt praecipua, quae de theoria maximorum et minimorum, ante calculi differentialis inventionem, dicenda erant: ex quibus evidenter apparet, theoriam illam, tunc temporis valde imperfectam fuisse, eamque, si valeat, valere tantummodo de aequationibus algebraicis, cum vero ad transcendentales applicari nequeat; et, quod multum est, nullum certum indicium cognitum fuisse memoratur, quo maximum, sine curvarum aut superficierum ope, a minimo distinguatur.

11. Invento autem calculo differentiali a Leibnitzio et calculo fluxionum a Newtone, horum calculorum periti statim elaborarunt, in iis accommodandis ad Methodos *Tangentium*, *Subnormalium* caet. sed inprimis etiam ad theoriam *de Maximis et Minimis*.

Inter eos vel maxime excelluit saepius jam memoratus de l'Hopital, suo excellenti citato opere, quo omnis applicatio calculi differentialis ad curvarum doctrinam continetur: quam ob rem etiam eo opere utemur, ad indicandum, quomodo quaestiones de maximis et minimis, ope differentialis calculi, tunc resolvebantur (5).

Sit AB, *Fig.* 5, linea curva, O origo coördinatarum, OX abscissarum axis: sit P punctum curvae, cujus ordinata PQ, relata ad abscissam OQ, sit maxima aut minima omnium coördinatarum.

Sit P'Q' alia ordinata, et pq quam proxime ordinatae illi; erit, ducta P'r parallela OX, pr differentia, sive potius differentialis ordinatarum P'Q' et pq, id est $= \partial y$. Sic etiam erit Q'$q = \partial x$.

Differentialis autem, ∂y, si positiva intelligatur, positiva manebit usque ad punctum maxi-

(5) Vid. de l'Hopital, Op. cit. Sect. III. *Proposition Generale.*

maximi aut minimi, quoniam ordinatae eo usque semper accrescunt aut decrescunt, sed si maximum aut minimum locum obtinuerit, et ordinatae P'Q' et pq factae sint P''Q'' et $p'q'$, erunt differentiales ∂y in hac positione, respectu priorum, negativae, quoniam ordinatae nunc semper decrescunt aut accrescunt: sed omnis quantitas, quae a positione positiva in negativam pervenerit, transire debet per punctum, ubi fit vel zero vel infinitè magna. Ergo cum hae differentiales, in puncto maximi aut minimi, dum positivae fuerint, in negativas mutatae sint, oportet ut in illo puncto ∂y, relata ad ∂x, fiat aut zero, aut admodum magna, id est:

Pro maximo aut minimo erit $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ sive $= \infty$: quapropter, si ex data aequatione deducatur valor $\frac{\partial y}{\partial x}$, habetur aequatio, ejusmodi, ut si exinde resolvatur x, hic valor reddat y maximum aut minimum.

12. Est autem cognita res $\frac{\partial y}{\partial x}$ significare tangentem anguli, inter abscissarum axem et lineam, tangentem curvam in puncto P; ergo cum ille angulus in puncto maximi aut minimi aequalis fiat zero aut 90°, erit tangens puncti talis, aut parallela aut perpendicularis axi abscissarum. Hoc semper in puncto maximi et minimi locum habet, sed si convertatur enunciatio, non semper vera est. Namque, uti in *Fig.* 4. ostenditur, tangens parallela esse potest abscissarum axi, sine eo, quod ordinata PQ sit maxima aut minima. Tali autem casu erit P punctum inflectionis et eam ob causam erit in punto P, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ (6): si vero $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nihilo non fuerit aequalis, maximum aut minimum adesse posset; qua propter si valor ipsius x, ex aequatione $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ inventus, substituatur in $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, eaque habeat valorem determinatum, certi sumus maximum quoddam aut minimum adesse posse. Nec tamen si invenerimus $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ indicium hoc erit, maximum aut minimum non adesse, quandoquidem aequationum natura ejusmodi esse poterit, ut differentialis secunda nihilo aequales fiat, sine eo ut maximi aut minimi absentia indicetur.

13. De hoc casu autem, apud Mathematicos qui ante Tayloris aetatem floruerunt, nil notatum invenitur, sicuti etiam illis incognitum fuit, certum indicium, quo, omnibus in casibus, ope calculi differentialis, maximum distinguatur a minimo. Hic autem Mathematicus, inventor est Theorematis, quod ab eo etiam *Theorema Taylorianum* vocatur; quo theoremate omnia fere dubia remota sunt in quae, ante eum, Theoria de maximis et minimis nonnumquam incidebat. Hoc Theorema hodie tanquam fundamentum dictae the-

(6) Vid. de l'Hopital, op. cit. Sect. IV. Prop. II.

theoriae adsumtum est, qua propter et nos, illius opera, Quaestionem positam solvere conabimur. Quandoquidem autem, ut solutio sit generalior, theoriam de maximis et minimis functionum expondituri sumus ingenere, idque absque curvarum aut superficierum ope, (veluti huc usque veterum theorias illustravimus) hanc primam sectionem in tribus capitibus absoluturi sumus, quorum argumenta ex sequenti indice patent.

Caput primum. *De maximis et minimis functionum unius variabilis quantitatis.*

Caput secundum. *De maximis et minimis functionum duarum variabilium quantitatum.*

Caput tertium. *De maximis et minimis functionum, trium pluriumque variabilium.*

CAPUT PRIMUM.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM UNIUS QUANTITATIS VARIABILIS.

Functio unius quantitatis variabilis, est complexus quarundam quantitatum constantium, a, b, c caetera, et duarum variabilium x et y; quarum autem mutatio unius determinatur ope alterius variationis. Revera igitur totius functionis mutatio pendet a mutatione unius quantitatis, quam ob causam *functio unius variabilis quantitatis* dicitur.

Quantitates x *et* y inveniri possunt, ad primam, secundam, et superiorem potestatem evectae. Quod si una ad primum gradum tantum in functione adsit, dum alterius superiores potestates adesse possint, merito vocatur talis functio unius variabilis, et vulgo sic scribitur $y = \phi\,(x)$; cujus characteris significatio cognita satis est. Sin autem utriusque quantitatis x et y superiores potestates functione contentae sint, erit haec *implicita funtio*, quae hoc simplici modo indicatur, $\phi\,(x, y) = 0$.

Functiones unius quantitatis variabilis, igitur in duas species dispesci solent, quam ob causam de illis speciatim etiam agemus.

§. 1. *De Maximis et Minimis functionis simplicis* $y = \phi\,(x)$.

1. Si detur functio hujusmodi generalis $y = \phi\,(x)$, cujus una quantitas variabilis x determinatos valores induit, ipsa functio, seu potius quantitas y, huic functioni aequalis, etiam adipiscitur diversos valores, qui pendent a determinata quantitate, quam loco x substituerimus. Inter hos valores, cum a se invicem diversi sint, id est cum ille hoc sit major aut minor, adesse potest unus, qui omnium est maximus, aut minimus, et talis maximi aut minimi valoris proprietas, facile detegitur. Intelligatur enim y accipere valorem maximum aut minimum m, si x aequalis ponatur determinatae quantitati a: jam ve-

vero si in data functione loco x ponatur alius valor b, major aut minor quam a, perspicuum est, valorem, quem habebit y, hâc substitutione, casu maximi, minorem fieri oportere valore m, quem acceperit valore $x = a$.

Sic étiam si m sit minimus valor ipsius y, valores y, qui ex valore b ipsius x oriuntur, majores esse debent quam minimus valor m: et hoc est fundamentum, quo Theoria exponenda nititur.

Si itaque x mutetur in $a + i$ aut in $a - i$, utraque mutatione fiet $y = m - k$, necesse est, scilicet si $x = a$ faciat y maximum m; quod si y fieret minimum m casu $x = a$, evadat $y = m + k'$, cum loco $x = a$ substituimus $a + i$ aut $a - i$, oportet. Igitur casu maximi, quantitas k, qua y augetur, si x augeatur incremento i, erit negativa, et casu minimi simili modo quantitas k' positiva erit. Ergo ex valoribus positivis aut negativis horum incrementorum, judicium ferre possumus, utrum valor m ipsius y revera sit maximus an minimus: videamus igitur, ex generalibus valoribus horum incrementornm, quid obtinere debeat in ipso maximo aut minimo valore m, ubi incrementa illa nulla sunt.

2. *Theoremate Tayloriano* horum incrementorum valores generales in promptu sunt. Etenim si in data functione quantitas variabilis x acquirat incrementum i, invenitur incrementum k, ipsius y, id est totius functionis accretio, hac serie:

$$k = \frac{\partial y}{\partial x} i + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{2 \cdot 3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{caet.} \ldots \ldots (\pi)$$

(1): quando in proposita functione nullae potestates inveniuntur nisi positivae eaeque integrae, si n sit summae potestatis exponens, fiet $\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} = 0$, ergo series (π) eo casu constabit n terminis: si autem adessent potestates negativae aut fractae, nullae relationes differentiales evanescent, sed dicta series infinitum terminorum numerum continebit.

Cum series (π) generalis sit, valet etiam si in data functione loco x substituatur $x - i$, (quo casu incrementum fit decrementum,) dummodo characteres positivi $+$, quibus primae, tertiae, quintae *caetera* potestates ipsius i afficiuntur, mutentur in characteres negativos $-$.

Ponamus jam quamdam quantitatem a, quae loco x substituitur, praebere maximum aut minimum valorem ipsius y, inde differentiales relationes determinatos valores accipiant manifestum est, et si haec quantitas a augeatur aut diminuatur quadam quantitate i; inveniuntur incrementa k et k', quae ipsa functio, hâc mutatione, accipit, sequentibus seriebus:

$$\text{pro } x = a - i \text{ fiet } k = -\frac{\partial y}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{caet.} \ldots \ldots (\alpha)$$

$$\text{pro } x = a + i \ldots k' = + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{caet.} \ldots \ldots (\beta)$$

In

(1) Vid. Cl. de Gelder, *Beginselen der Differentiaalreek.*, I. Deel. §. 69. pag. 150.

In his seriebus, relationes differentiales sunt determinati valoris; etenim oriuntur si in relationibus differentialibus, ex ipsa functione $y = \phi(x)$ petitis, ponitur a loco x. Hae igitur relationes istae sunt, quae in maximo aut minimo valore locum habent. Si igitur detegere possumus, quid proprie fiunt hae relationes, inde profecto profluent regulae generales, quibus ad maximum aut minimum perveniatur; et ope fundamenti, supra expositi, facile constituitur certum indicium, quo maximum a minimo distinguatur.

Ut hoc instituatur, quoniam incrementum i pro lubitu sumtum est, tam parvum esse cogitetur, ut summa terminorum subsequentium $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1 . 2}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1 . 2 . 3}$ caet. multo minor sit, quam solus terminus primus $\frac{\partial y}{\partial x}$, ita ut valor positivus aut negativus totius seriei pendeat a positivo aut a negativo valore primi termini: quapropter sufficit si reliquos omittamus, et in solum primum terminum inquiramus, fiet igitur:

$$\text{si } x \text{ mutatur in } a - i \ldots\ldots k = -\frac{\partial y}{\partial x} \cdot i$$

$$\text{si } x \text{ mutatur in } a + i \ldots\ldots k' = +\frac{\partial y}{\partial x} \cdot i$$

In utraque hac aequatione, $\frac{\partial y}{\partial x}$, eundem valorem habet; sed incrementum ipsius y, est ante maximum aut minimum, negativum, post maximum aut minimum positivum: cum autem supra monuerimus, haec incrementa pro maximo, negativa, pro minimo, ambo positiva esse oportere, perspicuum est, si $\frac{\partial y}{\partial x}$ in statu maximi aut minimi quemdam valorem habeat, has aequationes, nullo modo cum maximi aut minimi proprietate congrui posse; ergo ut huic rei satisfaciamus, nil restat, quam ut hanc relationem differentialem nihilo aequalem ponamus; habemus igitur in puncto maximi aut minimi $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ et hinc incrementa k et k' evadunt:

$$\text{ante } max. \text{ aut } min. \; k = +\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1 . 2}.$$

$$\text{post } max. \text{ aut } min. \; k' = +\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1 . 2}.$$

Namque, quoniam, ob parvam admodum valorem ipsius i, terminus $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1 . 2}$ longe superet summam omnium terminorum subsequentium, pendebit valor positivus aut negativus totius seriei, a positivo aut negativo valore primi termini, ut supra. Ergo cum in utraque aequatione $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1 . 2}$ eodem charactere affecta sit, quoniam pro maximo k et k' negativa, pro minimo positiva esse debeant, et quoniam $\frac{i^2}{1 . 2}$ semper sit positi-

vus,

vus, oportet, ut, si $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ quemdam determinatum valorem habeat, *iste valor pro maximo sit negativus, pro minimo positivus.* Sed fiere etiam potest $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nihilo aequalem esse; qua ratione incrementa k et k' inveniuntur his aequationibus:

$$\text{ante } max. \text{ aut } min. \; k = -\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\text{post } max. \text{ aut } min. \; k' = +\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

namque valores positivi aut negativi ipsorum incrementorum, hic eodem modo ac supra, ex valore positivo aut negativo soli termini $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ judicantur. Idem jam adest casus ac supra de prima differentiali relationi; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ in utraque aequatione ejusdem est quantitatis, sed numquam, si habeat quemdam valorem, praebere potest talia, quae cum maximi aut minimi praesentia congruant; igitur oportet ut evanescant, qua ratione habemus $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$, et tum erit:

$$\text{ante } max. \text{ aut } min. \; k = +\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\text{post } max. \text{ aut } min. \; k' = +\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

est autem i^4 semper positivus, ergo cum $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ in utraque aequatione eadem sit, et eodem charactere afficiatur, haec relatio si maximum aut minimum adsit, praebeat incrementa k et k' negativa aut positiva, necesse est: ergo oportet ut pro maximo $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ habeat negativum valorem, pro minimo autem positivum. Si autem obtinuit $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$, probatur simili modo ac supra, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$ etiam zero aequalem esse debere, itidemque $\frac{\partial^6 y}{\partial x^6}$ pro maximo aut minimo, negativum aut positivum valorem induere, et sic eaedem conditiones per omnem seriem simili modo locum habent, nimirum pro maximo aut minimo relationes differentiales impares, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, nihilo aequales esse debent, et pares relationes, nisi zero fiant, valores negativos aut positivos induere oportent.

3. Ergo si omnia colligamus, sequentes regulas ponere possumus. Quandoquidem pro maximo aut minimo valore functionis $y = \phi(x)$ ejus prima differentialis relatio nihilo sit aequalis perspicuum est, *si ex data functione, determinetur* $\frac{\partial y}{\partial x}$, *atque nihilo* ae-

aequalis ponatur, prodire aequationem F $(x) = 0$ *ipsius* x; *ex qua si* x *resolvatur, obtinemus talem valorem, quo functio posita adipiscatur maximum aut minimum valorem:* ut autem rite indicetur quid obtineat, sive maximum sive minimum, confugiendum est ad secundam relationem $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, in qua *si substituatur valor inventus ipsius* x, *ipsaque hac substitutione fiat negativa, adesse potest maximum; si fiat positiva, minimum obtinet. Sin autem rogetur de maximo, fiatque* $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ *positiva, non aderit maximum; et vicissim, si pro minimo evadat negativa, nullum mimimum obtinet locum:* quod si accidat $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, consulere oportet tertiam relationem $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, quae *si post substitutionem inventi valoris ipsius* x, *evanescat, certi sumus maximum aut minimum locum saltem habere posse*, utrum autem adsit maximum sive minimum *ex valore negativo aut positivo quartae differentialis dijudicatur: quodsi* $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ *non evanescat, neque etiam aderit maximum aut minimum. Sic etiam si* $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ *pro maximo fiat positiva, aut pro minimo negativa, nullum maximum aut minimum valorem induet functio proposita.* Si et $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ evanescat, simili modo ex sequentibus relationibus, maximi aut minimi praesentia quaeri licet.

§. 2. *De maximis et minimis functionis implicitae* $\phi(x, y) = 0$.

4. De tali functione, eaedem regulae subsistunt, quae de simplici functione $y = \phi(x)$ expositae sunt. Quamquam enim tam implicita haec functio esse possit, ut ipsa y non, nisi magno labore, in functione ipsius x determinetur, et ob eam causam fiat $y = \phi(x)$, tamen, quoniam y prorsus pendet ab x, eaque variabili quantitate determinatur, cogitare saltem possumus, datam functionem $\phi(y, x) = 0$, ad formam $y = \phi(x)$ reductam esse; qua ratione, regulis expositis etiam subjecta est: sed quoniam functiones $y = \phi(x)$ et $\phi(y, x) = 0$ eaedem sunt, ea sola existente differentia, ut hujus forma ab illius differat, eam ob causam functio $\phi(x, y) = 0$ iisdem regulis paret.

Quodsi igitur tanquam functio duarum variabilium differentietur, relatio prima

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{F}(x, y)$$

nihilo aequalis poni debet, et in aequatione F $(x, y) = 0$, x et y, tales tum habent valores, ut ipsis proposita functio $\phi(x, y)$ maximum evadat aut minimum. Cum autem F $(x, y) = 0$ duas contineat variabiles, illa functio inservire nequit ad valores ipsius x et y determinandos, sed alia insuper requiritur aequatio; eaque in ipsa data func-

functione $\phi(x,y)=0$ datur: namque ob vinculum, quod invenitur inter primitivam functionem $\phi(x,y)=0$ et inter derivatam $F(x,y)=0$, omnino illâ uti licet, ad hanc resolvendam (2). Valoribus ipsarum x et y inventis, transeundum est ad considerationem secundae differentialis, ut cognoscatur utrum maximum aut minimum adsit, et quid praebeant valores inventi, utrum maximum aut minimum; id autem, aeque ac supra, ex positivo aut negativo valore hujus relationis differentialis confirmatur: et sic porro.

5. Ergo nihil inest difficultatis huic casui: functiones implicitae impeditiores quidem sunt tractatu, quam simplices; sed hoc ex aequationum naturâ petendum est, neque ex regulis, de *maximis* et *minimis*; quae regulae quam sint simplices, sequenti modo manifestum fit. Forma differentialis primae, functionis implicitae, in genere talis est:

$$M\partial x + N\partial y = 0 \quad (3), \qquad \text{ergo} \ldots\ldots \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{M}{N},$$

et cum haec nihilo aequalis esse debeat, erit,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{M}{N} = 0; \ldots\ldots \text{id est } M = 0.$$

ergo si coëfficiens M conjungatur cum data functione $\phi(x,y)=0$, hae duae aequationes praebebunt tales valores ipsis variabilibus x et y, ut propositam functionem maximum aut minimum reddant. Differentialis secunda hujusmodi est:

$$\partial M\partial x + M\partial^2 x + N\partial^2 y + \partial N\partial y = 0.$$

Quae si dividatur per ∂x^2, erit:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + N \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0;$$

sed $M=0$, et $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, ergo

$$\frac{\partial M}{\partial x} + N \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0; \text{ hinc } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{1}{N}.$$

Igitur si in data functione maximum aut minimum obtineat locum, sufficiet, coëfficientis M differentialem dividere per $N.\partial x$, et, substitutis valoribus inventis x et y, aderit maximum aut minimum prouti $-\frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{1}{N}$ fiat negativa aut positiva.

Si $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, erit differentialis tertia:

$$\partial^2 M\partial x + 2\partial M\partial^2 x + M\partial^3 x + 2\partial N\partial^2 y + N\partial^3 y + \partial^2 N\partial y = 0;$$

dividatur per ∂x^3, eritque

id

(2) Vid. Cl. de Gelder, op. cit. §. 118 et seq. pag. 320. Caeterum hoc per se patet; si detur $\phi(x,y)=0$, erit aequatio differentialis hujusmodi $F(x,y)=0$, et quoniam x et y in utraque aequatione eaedem sunt, prima inservire potest ad alteram resolvendam, et vice versa.

(3) Cl. de Gelder, op. mox cit. §. 119. pag. 322.

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + 2\partial M \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^3} + M \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial x^3} + \frac{2\partial N}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{N\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

id est, ob $M = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, et $\partial . M = 0$,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0; \text{ hinc } \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{N}.$$

Quae, cum in maximo aut minimo, nihilo aequalis esset oporteat, erit $\partial^2 M = 0$, et tum ex quarta differentiali relatione, quae erit

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial^3 M}{\partial x^3} \cdot \frac{1}{N},$$

maximi aut minimi praesentia, more solito, indicatur: et sic porro (4).

Sequentia jam Exempla, expositam theoriam illustrabunt.

6. Exemplum I. *In dato cubo* ABREQC Fig. 6. *collocare conum rectum, cujus axis coincidat cum diagonale majore* AE *cubi, ita ut hujus coni soliditas fiat maxima soliditatum, omnium conorum, qui dicto modo intra cubum contineri possint?*

Planum cogitetur perpendiculare ipsi diagonali AE, quod planum secabit plana lateralia BAD, BAC, DAC cubi, secundum lineas FG, FH et GH, quae inter se constituunt triangulum aequilaterum. Etenim, quoniam diagonalis AE, cum aretis AD, AB et AC, aequales angulos constituat, erunt ob situm perpendicularem plani FGH, lineae AF, AG, et AH inter se aequales, quapropter etiam FG, FH, et GH aequales erunt. In illo triangulo inscribatur circulus, cujus centrum, necessarie situm erit in puncto M, ubi planum FGH diagonale AE secatur. Caeterum ille circulus, lineis FG, FH, et GH tangitur in punctis L, K et I, quae puncta in mediis illis lineis sunt posita, et propterea conveniunt cum punctis, in quibus lineae FG, FH et GH, diagonalibus AR, AQ et AP secantur. Hicce circulus considerari potest tanquam basis coni recti, cujus vertex in puncto E erit situs, et cujus positio intra cubum talis est, qualis in problemate postulatur. Hujus coni soliditas determinatae magnitudinis erit si planum FGH positionem determinatam adeptum sit; quapropter, hujus plani situs ita erit determinandus, ut conus, qui ei, dicto modo, superimponatur, accipiat maximam soliditatem.

Ponatur $AB = a$, $AM = x$, erit $AQ = a\sqrt{2}$, $AE = a\sqrt{3}$, (quod satis constat,) ergo $EM = AE - AM = a\sqrt{3} - x$; porro in triangulo rectangulo EPA erit

$$AP = AE \cdot Cos. PAE;\ Cos. PAE = \frac{AP}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6},$$

hinc

(4) Theoria de maximis et minimis huc usque exposita, invenitur, quamquam alia ratione et alio ordine tractata, in quampluribus libris, quorum inprimis sequentes memorari merentur. Eulerus, *Institutiones calculi differentialis*, Pars III. Cap. X et XI. Lagrange, *Theorie des fonctions Analytiques*, Partie second, Chap. V. § 25 sqq. edit. poster. La Croix, *Traité de calcul differentiel et integral*, Tom. I. § 150. pag. 360 sqq.

hinc invenitur, ope goniometricarum proprietatum, *Tang.* PAE $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

In triangulo rectangulo AMI, erit

$$IM = AM\ Tang.\ IAM;\ \text{id est},\ IM = \tfrac{1}{2}x\sqrt{2}.$$

Sed IM est radius circuli, qui basis est coni; hujus circuli area itaque erit $= \frac{1}{2}\pi x^2$; π denotante relationem inter radium et circumferentiam circuli, cujus radius unitati aequalis est; et cum altitudo coni EM $= a\sqrt{3} - x$, erit ejus soliditas y,

$$y = \tfrac{1}{6}\pi a x^2\sqrt{3} - \tfrac{1}{6}\pi x^3,$$

atque haec functio maximum evadere debet. Habemus igitur:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{3}\pi a x\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\pi x^2 = 0 = \tfrac{1}{3}\pi a\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\pi x.$$

Ex hâc aequatione invenitur $x = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$; id est, AM $= \frac{2}{3}$AE.

Si igitur per punctum M, quod duas partes tertias a puncto A distat, transeat planum perpendiculare per diagonalem AE, eique plano superimponatur, conum, cujus vertex est in E, et qui plana lateralia BAD, BAC et CAD tangit, habebit hicce conus soliditatem maximam; nimirum:

$$y = \tfrac{2}{27}a^3\sqrt{3},$$

idque eo confirmatur, quod differentialis secunda relatio, scilicet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\tfrac{1}{2}\pi,$$

quamquam constantis valoris, tamen negativa sit.

7. Exemplum 2. *Invenire conum rectum, cujus superficies sit maxima omnium superficierum conorum, qui in eodem globo inscribi possint?*

Fig. 7. Sit M centrum globi; ACBE circulus magnus; ducatur diameter CME, et cogitetur verticem coni situm esse in puncto E, ejusque basin AB perpendicularem diametro CME.

Ponatur diameter globi $= a$, et fac CD $= x$, erit in circulo magno CAEB,

$$BD^2 = CD \times DE,\ \text{id est:}\ BD^2 = x\,(a-x),\ \text{et}\ BD = \sqrt{(ax - x^2)},$$

ergo in triangulo rectangulo BDC erit $BC = AC = \sqrt{(CD^2 + BD^2)} = \sqrt{(x^2 + ax - x^2)} = \sqrt{ax}$. Cum BD sit radius baseos circularis ipsius coni, erit circumferentia hujus baseos $= 2\pi . BD = 2\pi\sqrt{(ax - x^2)}$, ergo

Superficies coni $=$ *baseos circumf.* $\times \frac{1}{2} . BC = y = \pi\sqrt{(a^2x^2 - ax^3)}$,

et haec est functio cujus maximus valor quaeri oportet: habemus, differentiando:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a^2x - 3ax^2}{2\sqrt{(a^2x^2 - ax^3)}} = \frac{2a^2 - 3ax}{2\sqrt{(a^2 - ax)}} = 0.$$

Ergo etiam $2a^2 - 3ax = 0$; hinc invenitur $x = \frac{2}{3}a$: ergo si coni recti altitudo aequalis sit duabus partibus tertiis diametri globi, ejus superficies maxima fieri potest; utrum autem ea superficies maxima fieri debeat, sequenti calculo confirmatur.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{3a}{2\sqrt{(a^2 - ax)}} + \frac{a(2a^2 - 3ax)}{4\sqrt{(a^2 - ax)^3}}.$$

Quodsi in hac secunda differentiali generali, restituatur, loco x, ejus valor, pro maximo inventus, nimirum $x = \frac{2}{3}a$, habemus, sequentem valorem, illius differentialis pro maximo:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{3a}{2\sqrt{(a^2 - \frac{2}{3}a^2)}} = - \frac{9}{2\sqrt{3}} = - \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Qui cum sit negativus, certi sumus, conum, in globo inscriptum, accipere maximam superficiem, si ejus altitudo sumatur aequalis duabus partibus tertiis globi diametri.

8. Ad hoc Exemplum sequentem observationem adjicere liceat, qua saepius cum fructu uti possumus.

Si detur functio hujusmodi: $$y = \frac{p}{q},$$

erit ejus differentialis relatio hujus formae,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p\partial q - q\partial p}{q^2} = \frac{M}{q^2}:$$

ergo si agatur de maximo aut minimo, fiet $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; id est $p\partial q - q\partial p = 0$, sive $M = 0$.

Differentialis secunda erit, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q^2 \partial M - 2Mq\partial q}{q^4}$.

$$\text{Sed } M = 0; \text{ ergo } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial . M}{q^2} \ (5).$$

Quae pro maximo negativum, pro minimo positivum valorem accipere debet: sed cum q^2 semper sit positiva, oportet ut pro maximo aut minimo $\partial . M$ praebeat valorem negativum aut positivum.

Ergo in exemplo praecedenti non opus est ut totius functionis $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a^2 - 3ax}{2\sqrt{(a^2 - ax)}}$ differentialem quaeramus: etenim si detur

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{M}{N} \text{ erit } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{N\partial M - M\partial N}{N^2}, \text{ id est ob } M = 0: \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial M}{N},$$

in nostro exemplo est $M = 2a^2 - 3ax$, ergo $\partial M = - 3a\partial x$, igitur erit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{3a}{2\sqrt{(a^2 - ax)}},$$

quod supra etiam invenimus; sed evidenter apparet, nos, hac ratione, citius ad scopum pervenisse. Ita in aliis casibus, quibus alia est functionum forma, molestum laborem saepe evitare possumus; sed quoniam hoc pendeat a functionis forma particulari, eaque modis infinitis varia esse possit, de talibus plura non adjiciam.

9. Exemplum 3. *Fig.* 8. *Invenire maximum vel minimum valorem functionis, quae est aequatio Hyperbolae,* $2axy = ax^2 - bx^2 + a^3$?

Ex

(5) Cf. Eulerus, *Instit. Calc. Diff.* Cap. X. §. 266 et 267.

Ex data aequatione invenitur $y = \frac{(a-b)x^2 + a^3}{2ax}$,

$$\text{hinc } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4a(a-b)x^2 - 2a((a-b)x^2 + a^3)}{4a^2x^2} = 0,$$

$$\text{id est, } 4a(a-b)x^2 - 2a((a-b)x^2 + a^3) = 0,$$

sive $(a-b)x^2 = a^3$; ex qua invenitur: $x = \pm a . \frac{\sqrt{(a^2 - ab)}}{(a-b)}$;

et hoc valore in data aequatione substituto, habemus $y = \pm \sqrt{(a^2 - ab)}$. Ut autem judicemus utrum valor inventus ipsius x, tribuat maximum aut minimum valorem ipsi functioni datae, consulere debemus secundam relationem differentialem, quae pro maximo positiva, pro minimo negativa esse debet; sed cum $\frac{\partial y}{\partial x}$ habeat valorem fractam, sufficiet, uti in N°. 8. vidimus, si ejus fractionis nominatorem tantum differentiemus, atque indagemus utrum illa differentialis, substituto valore ipsius x, fiat negativa aut positiva. Est autem ille nominator

$$2(a-b)x^2 - (a-b)x^2 - a^3 = (a-b)x^2 - a^3,$$

cujus differentialis erit, $2(a-b)x\partial x$,

et substituto $x = \pm a \frac{\sqrt{(a^2 - ab)}}{(a-b)}$, fiet illa $\pm 2a\sqrt{(a^2 - ab)}$.

Videtur igitur, hoc casu, cum eodem valore ipsius x, congruere duos valores aequales ipsius functionis datae, quorum alter est minimus, alter maximus; sed si, *Fig.* 8, OQ sumatur $= x = + a \frac{\sqrt{(a^2 - ab)}}{(a-b)}$, erit PQ $= y$ valor minimus functionis datae; sed etiam in opposita parte si sumatur OQ' $= x$, erit P'Q' $=$ PQ alter valor ipsius y, quae in curvae parte $a'b'c'$, aeque bene minimus est, atque ordinata PQ in parte abc. Ergo duo adsunt minima aequalia, quae autem respectu se invicem sunt positiva et negativa; eamque ob causam aequatio $\pm 2a\sqrt{(a^2 - ab)}$ non indicat maximum et minimum, sed duo minima aequalia, quorum alter, respectu alterius, est negativus.

10. Exemplum 4. *Invenire maximos et minimos valores functionis implicitae* $2y^2 + 2y - 6yx + 3x^2 - 5 = 0$?

Hujus functionis differentialis prima hujusmodi est,

$$4y\partial y + 2\partial y - 6y\partial x - 6x\partial y + 6x\partial x = 0,$$

sive $(6x - 6y)\partial x + (2 + 4y - 6x)\partial y = 0 : \partial y = - \frac{6x - 6y}{2 + 4y - 6x} = 0$,

ergo ex aequationibus

$$6x - 6y, \text{ et } 2y^2 + 2y - 6yx + 3x^2 - 5 = 0,$$

determinandi sunt valores ipsarum x et y.

Ex prima habemus $x = y$, ergo altera fit hujusmodi,

$$2x^2 + 2x - 6x^2 + 3x^2 - 5 = 0,$$

id est $x^2 - 2x = - 5$, quae si resolvatur, praebet

$$x = y = - 1 \pm 2\sqrt{-1}.$$

Qui valores cum imaginarii sint, patet, functionem propositam non posse habere maximum aut minimum.

Ex his paucis exemplis, quam luculentissime patet, quomodo maxima aut minima functionum unius variabilis quantitatis, in genere indagari possint: ut autem nil omittamus, monendum est, quaenam praecipue de theoria exposita animadvertenda sint, et quinam sint casus, quibus, in quaestionum solutione, aliam viam ingredi oportet.

§. 3.

OBSERVATIONES.

11. OBSERVATIO I. Si complures relationes differentiales, inde a secunda, ope ejusdem valoris ipsius x, ex prima differentiali relatione inventi, evanescant, indicium erit, in data aequatione adesse factores totidem aequales, qui sunt hujusmodi $(x - c)$.

Etenim si detur functio, quae ad hanc formam redigi potest

$$y = a + b\,(x - c)^n,$$

n existente numero positivo et integro,

$$\text{erit } \frac{\partial y}{\partial x} = bn(x - c)^{n-1} = 0,$$

ex qua inveniuntur, $n - 1$ valores ipsius x, aequales c, porro

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = bn(n - 1)\,(x - c)^{n-2},$$

quae relatio evanescit si valor ipsius $x = c$ substituatur, et sic etiam reliquae relationes differentiales evanescunt, usque ad $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, quae accipit constantem valorem. Ergo ex hoc constanti valore, prouti b erit negativa aut positiva, dijudicandum est, utrum adsit maximum aut minimum, scilicet si n est numerus par: quodsi n est numerus impar, erit relatio $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ impar, et sequens relatio $\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}$, quae par erit, per se evanescit, quapropter nullum maximum aut minimum aderit: quodsi igitur tales functiones dentur, a priori judicari potest, utrum adsit maximum aut minimum, et quinam sit valor ipsius x, qui reddat y maximum aut minimum. Sed plerumque functiones non occurrunt tali forma, at formam aequationis superioris gradus habent: ergo si detur aequatio superioris gradus, cujus maxima aut minima invenienda sunt, inutile non erit, prius indagare, utrum in hâc aequatione accedant factores aequales. Atque horum factorum inda-

da-

dagatio difficilis haud est. Etenim, quoniam hi factores aequales, uti vidimus, etiam adesse debent in aequationis differentialibus subsequentibus, nihil aliud agendum est, quam tamdiu differentiationem instituere, donec obtinuimus aequationem primi aut secundi gradus, ex quibus factor, si adsit, quam facillime invenitur (6).

Ergo casus, quem nunc consideramus, locum habere nequit, nisi functio data sit aequatio, quae quarti saltem est gradus, et nisi differentiales, prima, secunda, tertia, caetera, eundem factorem habeant.

12. Exemplum 5. *Invenire maximos vel minimos valores functionis* $y = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 16 = 0$?

Differentietur aequatio, eritque:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 - 36x^2 + 108x - 108 = 0,$$

ergo aequatio

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0;$$

inservire debet ad illum valorem determinandum, quo functio proposita fiat maximum aut minimum: videamus autem num ista aequatio constet ex producto factorum aequalium, id est, videamus utrum tres valores qui ipsi x tribuantur, aequales sint; differentietur igitur denuo, eritque:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12x^2 - 72x + 108;$$

et differentialis tertia erit

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 24x - 72 = 24(x - 3),$$

et cum illa differentialis tertia, habeat factorem $x - 3$, aderit etiam ille factor in prima et secunda differentiali, quapropter, divisione instituta, patebit:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4(x - 3)^3 = 0;$$

ergo erit $x = 3$, quantitas, qua functio proposita fit maximum aut minimum. Ut hoc dijudicetur, habemus,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12(x - 3)^2,$$

quae cum fiat nihilo aequalis, posita $x = 3$, erit

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 24(x - 3),$$

quae

(6) Methodus horum factorum inveniendorum, alio modo exposita est a Cl. de Gelder, in opere *Wiskundige Lessen*, II. Cursus, L. Les, §. 355. pag. 245. La Croix prolixe has investigationes tractavit in opere suo jam citato: Itidem Eulerus, op. cit. Cap. X.

quae etiam nullum valorem praebet; at ex quarta differentiali habemus

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = + 24,$$

quae cum sit positiva, patet, valorem ipsius x praebere minimum valorem functioni.

Hoc judicium autem citius fertur, si consideremus, ex conditione positiva primae differentialis, differentiales sequentes esse positivas, et cum ex exponenti impari 3 videri liceat quartam differentialem habere constantem valorem, aderit minimum.

13. Observatio II. Quamvis Methodus de maximis et minimis generalis sit, tamen datae functiones ita constitutae esse possunt, ut earum relationes differentiales, ejusmodi sint, in quas regulae expositae institui nequeunt, ad eos valores determinandos, quibus fiant maximum aut minimum: eosque casus, qui ex generali Methodo excipiuntur, et in quibus ob eam rem alia erit applicatio, nunc considerabimus.

Hoc semper fere locum obtinet, si in data functione quantitatum variabilium x aut y, aut utriusque potestates fractae offendantur: detur v. c. talis functio

$$y = b + c\sqrt[3]{(x-a)}.$$

Namque si differentietur, invenitur:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}};$$

ergo, secundum regulam expositam, erit $\frac{c}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}} = 0$,

et talis est aequatio ex qua valor ipsius x determinari debet, qui positam functionem reddat maximum aut minimum. Ex ea autem $c = 0$ nullum valorem ipsius x praebet, si autem facias $\sqrt[3]{(x-a)^2} = 0$, habemus $x = a$, sed inde sequitur $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c}{0} = \infty$; ergo in hoc et in aliis similibus casibus, nullus valor ipsius x, pro maximo aut minimo invenitur, nisi ponatur $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$. In hoc casu, si agatur de lineis curvis, tangens puncti in *max.* aut *min.* erit perpendicularis abscissarum lineae, cum in iis casibus, in quibus $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ponatur, illa tangens huic lineae parallela sit.

Sed si in talibus casibus, ponendo $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, illum valorem ipsius x determinaverimus, quo y fieri potest maximum aut minimum, aliam viam etiam ingredi oportet, qua apparet, utrum revera adsit maximum aut minimum, et quid proprie obtineat sive sit maximum sive minimum. Etenim cum differentiales secunda, tertia caet. si $\frac{\partial y}{\partial x}$ fiat ∞, etiam infinite magnae evadant, ex illis recenseri non potest, quid fiant proximarum or-

ordinatarum incrementa, sive positiva sive negativa. Hanc ob causam semper convincimur de maximi aut minimi praesentia, si in data functione ponamus loco $x = a$, $x = a + i$ et $x = a - i$. Etenim si pro utroque hoc valore, y acquirat valorem majorem, quam eum, quem ponendo $x = a$, adepta erat, perspicuum est, incrementum ipsius y esse positivum, et valorem ipsius x reddere y minimum: quod si valor y ponendo, $x = a + i$ et $x = a - i$ fiat minor, quam ponendo $x = a$, praebebit $x = a$ maximum valorem ipsi y.

Sic in aequatione, quam supra posuimus $y = b + c\sqrt[3]{(x-a)}$ erit ob $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2c}{9\sqrt[3]{(x-a)^5}}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = +\frac{10c}{27\sqrt[3]{(x-a)^8}}$, et cum $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, praebeat $x = a$, fient etiam omnes relationes differentiales sequentes ∞; quare nos docere non possunt, quid obtinet locum, sive maximum aut minimum, sive non. Itaque si in data aequatione, loco $x = a$ ponatur $a + i$ et $a - i$, habemus

$$1.\quad y' = b + c\sqrt[3]{(a+i-a)} = b + c\sqrt[3]{i}.$$

$$2.\quad y'' = b + c\sqrt[3]{(a-i-a)} = b + c\sqrt[3]{-i} = b - c\sqrt[3]{i}.$$

Quare cum hac substitutione prior valor ipsius y fiat major quam b (id est, major quam valor ipsius y, qui ex $x = a$ sequitur) alter autem minor, eam ob causam $x = a$, nullum valorem maximum aut minimum praebet ipsi y.

Sequens exemplum magis etiam, quae dicta sunt, illustrabit.

14. Exemplum 6. *Invenire maximas aut minimas ordinatas parabolae cubicae, Fig. 9, cujus aequatio est*

$$y - a = \sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{a(a-x)^2}\ \ (7),$$

posita origine coördinatarum in O?

Ex ipsa curvae figura, atque ex aequationis forma apparet, adesse minimam ordinatam $y = PQ$, in puncto P, ubi curva reflectitur, et cujus coördinatae sunt $OQ = a$ et $PQ = a$, ergo et calculo inveniri oportet in illo puncto adesse ordinatam minimam.

Si datam aequationem differentiemus erit: $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{(a-x)}}$, quae si ponatur infinitae magnae quantitati aequalis, erit $\frac{2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{(a-x)}} = \infty$: sive $3\sqrt[3]{(a-x)} = 0$; unde $x = a$, ergo si adsit maximum aut minimum, erit $x = a$ valor, quocum haec conveniunt: cum autem ex relationibus sequentibus, quae omnes evadant ∞, judicare non possimus utrum maximum aut minimum adsit, ponatur in data functione $x = a + i =$ Oa'

(7) Vid. de l'Hopital, *Analyse des infiniments petits*, Sect. III. Exemp. II.

Oa' et $x = a - i = Oa$; hoc modo fiunt ordinatae $a'b'$ et ab illae, quae proximae sunt maximae aut minimae ordinatae PQ,

$$a'b' = y' = a + \sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{(a - a - i)^2} = a + \sqrt[3]{a}\ .\ i^2,$$
$$ab = y' = a + \sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{(a - a + i)^2} = a + \sqrt[3]{a}\ .\ i^2.$$

et cum hi valores ambo sint majores quam valor conveniens cum abscissae $x = a$, erit incrementum ipsius y positivum, et $x = a$ erit ejusmodi valor, qui positam functionem y, minimam reddat.

15. In Introductione N°. 11. indicavimus, quomodo antiquitus demonstrabant, casu maximi et minimi, primam differentialem relationem nihilo aut infinitae magnae quantitati aequalem fieri debere: idque, loco citato, ex ratiocinio, tam generaliter profluit, quam ex theoria supra exposita, colligimus, casu maximi aut minimi, $\frac{\partial y}{\partial x}$ nihilo aequalem esse oportere. Ex ea autem theoria nullo modo sequitur $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ esse posse, sed ex forma particulari functionum hic casus a nobis indicatur: attamen hinc non sequitur; nostram theoriam, quae, utpote generalis, ea non praebet omnia, quae locum habere possunt, imperfectam esse: namque ob id solum, quod generalis sit, casus, quo $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ poni oportet, ex ea excluditur.

Quod enim veteres indicabant, id tantummodo ad lineas curvas referendum est, et tum, uti in *Fig.* 9, si $\frac{\partial y}{\partial x}$ fiat ∞, indicium aderit, tangentem ejus puncti, ad quod maxima aut minima ordinata pertinet, abscissarum lineae esse perpendicularem, sed quoties hoc obtinet, nimirum, ut et tangens sit perpendicularis abscissarum lineae, et ordinata simul sit maxima aut minima, erit punctum, de quo sermo est, uti ex curvarum theoria constat, *punctum reflectionis* (8): ergo ponendo $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ proprie non invenitur ordinata maxima seu minima, sed locus ubi adest reflectionis punctum; quare ista consideratio proprie non pertinet ad maxima et minima, sed ad theoriam punctorum reflectionis; eamque ob causam ex nostra theoria, quae tantummodo spectat ad maxima et minima functionum in genere, hicce casus excipitur; sed ei accedit, utpote casus particularis, qui functionum particulari formae tribuendus est.

16. Attamen cum utroque casu, tum si $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, tum si $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, eodem principio usi simus, ad maximum aut minimum indicandum, vel ad maximum a minimo distinguendum, mirum omnino videtur, primo tantum casu, generali indicium adesse, quod autem

(8) Vid. de l'Hopital, op. cit. Sect. IV. Prop. III. N. 2.

tem altero non applicatur. Nimirum in utroque casu, maximi aut minimi praesentia, eo nititur fundamento, ut, invento pro maximo aut minimo v. c. $x = a$, et posito in data functione loco $x = a$, $x = a + i$, et $x = a - i$, hâc substitutione, incrementum ω ipsius y, pro maximo fiat negativum, pro minimo positivum; illud autem incrementum generali modo invenitur ope Tayloris theorematis

$$\omega = \pm \frac{\partial y}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{i^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ . caet.}$$

Jam vero si aequatio data ejusmodi est, ut pro $x = a$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ fiat nihilo aequalis, valor ipsius incrementi, invenitur ex valore, quem accipiat $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; et si ille sit positivus, aderit *minimum* si autem sit negativus obtinebit *maximum*: sin autem $\frac{\partial y}{\partial x}$ fiat ∞, etiam reliquae relationes differentiales infinitae magnae evadent, et quamquam ob i infinite parvum, incrementum ω, etiam parvum admodum evadat, (uti et oportet,) tamen judicium nullum ferre possumus, utrum illud incrementum negativum sit an positivum: ergo hoc casu Tayloris Theorema nobis non praebet generale indicium ad maximum aut minimum indicandum, sed ut de hoc judicemus ex ipsa data functione justum illius incrementi valorem, positivum aut negativum, quaerere debemus.

Summus Lagrange de casu, quo Tayloris theorema nullum certum valorem incrementi cujusdam functionis, praebere videtur, dicit: *La regle generale est en defaut* (9); sed, quamquam recte persuasum habeo, me non decere tanti viri verba improbare, utpote qui, quae dixit, ex inspecta rerum interna conditione hausit, eaque ego tenuis, ad superficiem vix tangere possum, tamen, temere non agere opinor, si ab iis verbis prorsus dissentiar.

Etenim, si sub tali forma accedat Tayloris series, quemadmodum eam protulimus, perspicuum est, casu, quo omnes relationes differentiales ∞ evadunt, seriem Taylorianam nobis praebere non posse justos valores positivos aut negativos incrementorum; sed quare non valeret illa series, dummodo aliam formam induisset, quae ejusmodi esset ut relationes differentiales, ex quibus constaret, nullo modo, infinite magnae esse possint; quo casu illa series pendeat a potestatibus negativis aut fractis ipsarum relationum differentialium necesse est: sed haec omnia explanare et illustrare meum non est, utpote tanta sagacitate non praeditum, vel adeo in re non versatum, qui in his, quae a nemine, quantum scio, ita sunt tractata, ut nil desiderandum supersit, aliquid efficerem.

17. Si igitur relationes differentiales ita constitutae sint, ut ad maximum aut minimum

(9) Vid. ejus op. *Theorie des fonctions analytiques*, Prem. Part. Chap. V. pag. 43. Edit. de 1813.

mum valorem alicujus functionis indicandum, inservire non possint; in ipsa functione loco valoris pro maximo aut minimo inventi, substituantur duo alii, quorum hic est minor, ille major, et tunc ex valore positivo aut negativo incrementi, quod tota functio hinc acquirit, recensendum erit maximum aut minimum. Haec regula generalis est, eaque nobis maximum aut minimum indicet, in quamcunque functionem instituatur, necesse est. Sed ne nil omittam, dubium aliquod removere conabor, in quo nonnunquam incidimus: nimirum si detur functio hujusmodi:

$$y = a + b \sqrt{(c - x)}$$

ejusque functionis maxima aut minima rogentur, habemus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{2\sqrt{(x - c)}},$$

ex qua, posito $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ habemus $x = c$, ergo si adsit maximum aut minimum erit $x = c$ iste valor, quo proposita functio maximum aut minimum fieri debet, et cum $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ caetera, etiam fiant ∞, regula modo repetita, hic usu venit: pone igitur $x = c - i$ et $x = c + i$ fietque

$$y' = a + b \sqrt{(c - c - i)} = a + b \sqrt{i};$$
$$y'' = a + b \sqrt{(c - c + i)} = a + b \sqrt{-i};$$

valor ordinatae y' antecedentis est major quam valor ordinatae y, ergo, si potest, ordinata illa y minima esse debet, sed, quandoquidem valor ordinatae y'' sequentis, (quae pro minimo itidem major esse deberet, quam ordinata y,) sit imaginarius, indicium certum deesse nobis videtur, quo justo modo, de maximo aut minimo statuamus.

Eulerus, qui de talibus functionibus in ejus opere citato *Instit. calc. diff.* Cap. XI. § 278, ex professo agit, singulare nomen tribuit talibus maximis et minimis, eaque vocat, *maxima et minima secundae speciei;* sed certo statuere non ausim, utrum talia maxima aut minima revera locum habeant? Etenim, si curvam construamus, ad quam functio

$$y = a + b \sqrt{(c - x)},$$

pertinere potest, apparebit, ejus formam ita esse, quemadmodum *fig.* 10 curvâ AB indicatur. Punctum B in hac curva, illud est punctum, cujus abscissa x aequalis est c, et cujus ordinata BQ $= y$ aequalis est a, id est; cujus ordinata est minima, si minima esse possit. Ergo cum obtineamus ordinatas imaginarias, si x ponatur major quam a, videtur ut curva in puncto B terminetur: sed revera hoc non ita est: namque praeter curvam AB, adest etiam altera pars, quae, quamquam imaginaria, tamen, utpote in functione data contenta, a curva AB segregari nequit, sed cum parte AB, illa pars imaginaria (quae curva imaginaria ex. gr. sit Ba) constituit unam curvam (ABa) cujus aequatio est

$$y = a + b \sqrt{(c - x)}.$$

Ex-

Ergo si haec opinio falsa non sit, ex ea sequitur, datam functionem ingenere non gaudere maximo seu minimo: idque tum indicatur eo, quod posito $x = c - i$ et $c + i$, incrementum ipsius y, quod, cum uno horum valorum convenit, imaginarium sit, ideoque diversum ab incremento, ex altero valore ortum, cum tamen pro maximo aut minimo haec incrementa diversa esse non possint, sed utrumque aut negativa aut positiva esse debeant.

18. Observatio III. Invento valore ipsius x, ex $\frac{\partial y}{\partial x}$, qui datae functioni maximum aut minimum valorem praebet, fieri potest, ut substituto illo in altera relatione differentiali $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, haec fiat $\frac{0}{0}$; quomodo igitur, si hoc fiat, de maximi aut minimi praesentia convincimur? animadvertendum est $\frac{0}{0}$ significare aliquod indeterminatum: $\frac{0}{0}$ in genere neque zero, neque infinite magnum est, sed plerumque est determinatae quantitatis: ad eam autem inveniendam haec adest regula: sit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\phi(x)}{F(x)},$$

fiatque haec relatio, substituto valore invento ipsius x, $\frac{0}{0}$: *tum differentientur nominator* $\phi(x)$ *atque denominator* $F(x)$ *separatim, eritque, si iterum dividantur*, $\frac{\partial . \phi(x)}{\partial . F(x)}$ valor quaesitae quantitatis; scilicet postquam in hac functione loco x restituatur ejus valor inventus: quod si hac restitutione iterum acquiramus $\frac{0}{0}$, eodem modo erit procedendum, donec justam fractionis quantitatem invenerimus (10). Opus autem non censeo casum exemplis illustrare.

19. Observatio IV. Saepenumero in quaestionum resolutione accidit, ut aequatio, ex cujus differentiali, maximum aut minimum inveniri oportet, tam implicata est, ut multum operis atque laboris requiratur ad eam tractandam. Hoc casu plerumque elegantiorem solutionem praebere possumus, si in solutione duabus utamur variabilibus, qua ratione erit $z = \phi(x, y)$ functio, cujus maximum aut minimum rogatur: ut autem redigamus solutionem, ita ut pareat regulis, de functionibus unius variabilis expositis, oportet, ut ex natura quaestionis, aliam insuper quaeramus aequationem hujusmodi, $\Phi(x, y) = 0$, (eaque *conditionis aequatio* semper aderit, si *a priori* perspicere possimus, quaestionis solutionem ab una tantum variabili quantitate pendere.) Namque eo modo si invenerimus $\frac{\partial z}{\partial x}$

(10) Regula demonstrata est ab Ill. Lagrange, op. cit. Part. I. Chap. V. §. 30 sqq.; a La Croix, op. cit. Tom. I. §. 232. pag. 460 sqq.; a Bezout, *Cours de Mathematiques*, Tom. IV. §. 63 sqq. Edit. 1767.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = M + N\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

ex *aequatione conditionis* invenire possumus valorem $\frac{\partial y}{\partial x}$, quo substituto in praecedenti aequatione, obtinemus aequationem duarum variabilium

$$F(x, y) = 0$$

ex qua resolvantur x et y ope alterius aequationis $\Phi(x, y) = 0$.

Ejusmodi casus datur in sequenti exemplo:

20. Exemplum 7. *Datis quatuor lineis* a, b, c, d, *Fig.* 11, *invenire maximum quadrilaterum, quod his lineis confici potest?*

Sit ABCD illud quadrilaterum. Si cognitus fuerit angulus DAB, inter lineas a et d, perspicuum est quadrilaterum acquirere figuram determinatam; quare si hicce angulus vocetur x, quaestionis solutio pendebit, a determinatione ipsius x. Verumenimvero, quamvis haud difficile sit, ex quinque dimensionibus a, b, c, d et x, aream quadrilateri invenire, tamen functio, qua area determinatur, tractatu valde molesta erit: quam ob causam ponamus angulum oppositum DCB, y, et inveniamus aream in functione duarum variabilium x et y. Nihil autem facilius: etenim

Cum *area* Trianguli $BAD = \frac{1}{2}AB \cdot AD\ Sin.\ BAD = \frac{1}{2}a \cdot d\ Sin.\ x$,
et *area* Trianguli $BDC = \frac{1}{2}BC \cdot DC\ Sin.\ BCD = \frac{1}{2}b \cdot c\ Sin.\ y$,
erit *area* Quadr. $= z = \frac{1}{2}ad\ Sin.\ x + \frac{1}{2}bc\ Sin.\ y \ldots\ldots (\alpha)$.

Jam vero, quoniam

$$AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\ Cos.\ BAD = BD^2,$$
$$\text{et } BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD\ Cos.\ BCD = BD^2,$$

erit, substitutis valoribus,

$$a^2 + d^2 - 2ad\ Cos.\ x = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos.\ y \ldots\ldots (\beta)$$

aequatio conditionis, de qua monuimus.

Ex hac ipsa aequatione videri licet, solutionem difficiliorem fieri, si area ab una variabili quantitate penderet, namque ex aequatione (β), invenitur *Cos.* y in functione *Cos.* x; hinc iterum invenitur *Sin.* y, cujus autem valor, erit functio implicatior, et substitutione in aequatione (α) facta, a variabili quantitate x tantummodo pendebit, quae aequatio tamen haud simplex erit.

Differentietur aequatio (α) supponendo tum x, tum y esse variabilem, eritque

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}ad\ Cos.\ x + \frac{1}{2}bc\ Cos.\ y \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Si autem aequatio (β) differentietur, habemus

$$2ad \cdot \partial x \cdot Sin.\ x = 2bc\ \partial y \cdot Sin.\ y.$$

ex qua igitur $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ad\ Sin.\ x}{bc\ Sin.\ y},$$

et.

ergo erit $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}ad\ Cos.\ x + \frac{1}{2}bc\ Cos.\ y\ .\ \frac{ad\ Sin.\ x}{bc\ Sin.\ y}$,

ergo ad maximum aut minimum determinandum, erit

$$\tfrac{1}{2}ad\ Cos.\ x + \tfrac{1}{2}\ Cos.\ y\ .\ \frac{ad\ Sin.\ x}{Sin.\ y} = 0.$$

Quae redigitur ad $Cos.\ x\ Sin.\ y + Sin.\ x\ Cos.\ y = 0$; id est $Sin.\ (x + y) = 0$.

Ergo $x + y = 0$, vel $x + y = 180°$, vel $x + y = 360°$.

Quorum valorum $x + y = 180°$, locum habere potest, quoniam reliqui absurdi sunt. Invenerimus igitur, quaecunque sint magnitudines linearum datarum, maximum quadrilaterum quod his lineis construitur, illum esse, cujus anguli oppositi faciunt 180°; quoniam igitur

$$\angle \text{DAB} = \text{Suppl.} \angle \text{DCB},$$
$$\angle \text{ADC} = \text{Suppl.} \angle \text{ABC},$$

erit maximum quadrilaterum quod quatuor lineis confici poterit, illud *quod circulo inscribitur*. Praesentia maximi, nisi per se pateat, at certe ex valore negativo differentialis secundae colligitur: est enim $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial x}\right) Cos.\ (x + y)$.

Sed ob $x + y = 180°$ ideoque $x = 180° - y$, erit $Sin.\ x = Sin.\ y$ et $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ad\ Sin.\ x}{bc\ Sin.\ y} = \frac{ad}{bc}$; $Cos.\ (x + y) = -1$;

$$\text{ergo} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left(1 + \frac{ad}{bc}\right).$$

Invento $x + y = 180°$ erit aequatio (β) hujusmodi:

$$a^2 + d^2 - 2ad\ Cos.\ x = b^2 + c^2 + 2bc\ Cos.\ x,$$

$$\text{unde } Cos.\ x = - Cos.\ y = \frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2\,(bc + ad)};$$

ex qua invenitur justa magnitudo anguli DAB, si lineae a, b, c et d determinatae longitudinis dantur.

21. Saepenumero autem evenit, ut aequatio differentialis $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, et aequatio conditionis ipsas variabiles tam involutas contineant, ut vix, ac ne vix quidem, earum valores inveniantur; pervenire semper possumus ad relationem quandam generalem inter x et y, sed ipsarum integra resolutio multis diffiicultatibus laborat; quapropter istae quaestiones quibus hoc proprium est, non, nisi generali modo, resolvi possunt, neque particulari ratione exhiberi; et quoniam, si determinatio ipsius x difficilior est, quam ut instituatur, nullo modo ex secunda differentiali de maximo aut minimo statuere possimus, opus est, ut ex ipsarum problematum natura maximum aut minimum indagemus et decernamus. Hicce casus frequens est in istis quaestionibus, in qui-

quibus variabiles utpote *sinus*, *cosinus* caetera occurrunt, quod sequenti exemplo patebit.

22. Exemplum 8. *Detur machina funicularia* ACDB, *Fig.* 11*, *ex qua pendent duo pondera* P *et* Q: *sintque puncta suspensionis* A *et* B *in eadem linea horizontali sita, ad determinatam distantiam; quaeritur, ope Theoria de* maximis *et* minimis *aequilibrii conditiones indagare?*

Ne nimis implicetur solutio considerationibus difficilibus, intelligamus, funes AC, CP, CD, DQ, DB, pondere haud praeditos esse. Jam vero si z est centrum gravitatis totius systematis, ex Mechanica manifestum est, aequilibrium stabile dari, si illud centrum versetur in situ infimo.

Hoc praemisso, fac $AB = p$, $AC = a$, $BD = b$, $CD = e$, $CP = c$; $DQ = d$, $\angle ACP = x$; perspicuum est si angulus x determinatam magnitudinem habeat, omnino determinatam esse, figuram Machinae fanicularïae: quaestio igitur pendet ab una variabili quantitate: sed ut facilius procedat solutio, ponamus insuper $\angle BDQ = y$; qua ratione opus est aequatione conditionis. Ducantur lineae Cp, Dq, perpendiculares ad horizontalem lineam AB, sitque Zz, ex centro gravitatis eidem lineae perpendicularis ducta: quod si determinaverimus Zz, ea erit linea, quae maxima fiat oportet, ut centrum gravitatis versetur in situ infimo.

Est autem cognita proprietas gravitatis centri, summam momentorum ponderum datorum respectu lineae cujusdam, aequalem esse momento ponderis compositi, in gravitatis centro positi (11), id est hoc casu

$$(P + Q)\, Zz = P \,.\, Pp + Q \,.\, Qq, \qquad \text{hinc } Zz = \frac{P \,.\, Pp + Q \,.\, qQ}{P + Q}.$$

$$\text{Est autem } pC = AC \,.\, Cos.\, ACp = + a\, Cos.\, x,$$

$$qD = BD \,.\, Cos.\, BDq = + b\, Cos.\, y.$$

$$\text{Ergo } Pp = c + a\, Cos.\, x; \quad Qq = d + b\, Cos.\, y; \quad \text{ergo}$$

$$z = Zz = \frac{(c + a\, Cos.\, x)\, P + (d + b\, Cos.\, y)\, Q}{P + Q},$$

haec est functio quae maxima fieri debet; ejus differentialis est hujusmodi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-aP\, Sin.\, x - bQ\, Sin.\, y \,.\, \frac{\partial y}{\partial x}}{P + Q} = 0.$$

Quaeramus nunc aequationem conditionis, ex qua invenitur $\frac{\partial y}{\partial x}$.

$$\text{Est } Ap = a\, Sin.\, x, \qquad Bq = b\, Sin.\, y,$$

$$DE = qD - pC = b\, Cos.\, y - a\, Cos.\, x$$

$$CE = \sqrt{(CD^2 - DE^2)} = \sqrt{[e^2 - (b\, Cos.\, y - a\, Cos.\, x)^2]};$$

$$\text{ergo } AB = p = a\, Sin.\, x + b\, Sin.\, y + \sqrt{[e^2 - (b\, Cos.\, y - a\, Cos.\, x)^2]}$$

et

(11) Vid. Cl. Speyert van der Eyk, *Instit. Phys.*, §. 225. pag. 54.

et haec est conditionis aequatio; si differentietur ac resolvatur respectu $\frac{\partial y}{\partial x}$, invenitur

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(b\ Cos.\ y - a\ Cos.\ x)\ a\ Sin.\ x - a\ Cos.\ x\ \sqrt{[c^2 - (b\ Cos.\ y - a\ Cos.\ x)^2]}}{(b\ Cos.\ y - a\ Cos.\ x)\ b\ Sin.\ y + b\ Cos.\ y\ \sqrt{[c^2 - (b\ Cos.\ y - a\ Cos.\ x)^2]}}.$$

Ille valor jam substituatur in aequatione $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, quae post idoneam reductionem in sequentem aequationem mutatur:

$$(P + Q)\ Sin.\ x\ Sin.\ y\ (b\ Cos.\ y - a\ Cos.\ x) =$$
$$(Q\ Sin.\ y\ Cos.\ x - P\ Sin.\ x\ Cos.\ y)\ \sqrt{[c^2 - (b\ Cos.\ y - a\ Cos.\ x)^2]};$$

haec aequatio, si conjungatur cum aequatione conditionis, inservire debet ad illum valorem ipsius x determinandum, quo distantia Zz fiat maxima; et quo igitur, aequilibrii conditio indicetur.

Si justo modo ex aequatione conditionis valorem ipsius $Sin.\ y$ aut $Cos.\ y$, determinare possemus, hujus valoris substitutio in praecedenti aequatione nobis praeberet aliam, prorsus a $Sin.\ y$ aut $Cos.\ y$ liberatam, ex qua igitur sequeretur valor ipsius $Cos.\ x$ aut $Sin.\ x$ in functione quantitatum datarum: verumenimvero ex aequationum forma cernere licet, illas ad hunc scopum minime esse idoneas: qua propter aliam viam ingrediamur oportet. Ex aequatione conditionis habetur

$$\sqrt{[c^2 - (b\ Cos.\ y - a\ Cos.\ x)^2]} = p - a\ Sin.\ x - b\ Sin.\ y,$$

hic valor substituatur in altera, eritque

$$(P + Q)\ Sin.\ x\ Sin.\ y\ (b\ Cos.\ y - a\ Cos.\ x) =$$
$$(Q\ Sin.\ y\ Cos.\ x - P\ Sin.\ x\ Cos.\ y)\ (p - a\ Sin.\ x - b\ Sin.\ y);$$

id est devolvendo:

$$b\,P\ Sin.\ x\ Sin.\ y\ Cos.\ y - a\,P\ Sin.\ x\ Cos.\ x\ Sin.\ y + b\,Q\ Sin.\ x\ Sin.\ y\ Cos.\ y$$
$$- a\,Q\ Sin.\ x\ Cos.\ x\ Sin.\ y = pQ\ Sin.\ y\ Cos.\ x - pP\ Sin.\ x\ Cos.\ y -$$
$$aQ\ Sin.\ y\ Sin.\ x\ Cos.\ x + aP\ Sin.^2 x\ Cos.\ y - bQ\ Sin.^2 y\ Cos.\ x + bP\ Sin.\ x\ Sin.\ y\ Cos.\ y,$$

reducendo:

$$P\ Sin.\ x\,(p Cos.\ y - a\ Sin.\ y\ Cos.\ x - a\ Sin.\ x\ Cos.\ y) = Q\ Sin.\ y\,(p Cos.\ x - b Sin.\ y\ Cos.\ x - b Sin.\ x\ Cos.\ y),$$

sive

$$P\ Sin.\ x\ [p\ Cos.\ y - a\ Sin.\ (x + y)] = Q\ Sin.\ y\ [p\ Cos.\ x - b\ Sin.\ (x + y).],$$

id est:

$$P : Q = Sin.\ y\ [p\ Cos.\ x - b\ Sin.\ (x + y)] : Sin.\ x\ [p\ Cos.\ y - a\ Sin.\ (x + y)]$$
$$= \frac{[p\ Cos.\ x - b\ Sin.\ (x + y)]}{Sin.\ x} : \frac{[p\ Cos.\ y - a\ Sin.\ (x + y)]}{Sin.\ y}.$$

Producantur BD et AC donec secent directiones CL et DM ponderum P et Q, in punctis L et M; eritque in triangulis similibus ACp et AMq,

$$Ap : pC = Aq : qM,$$

id est, $a\ Sin.\ x : a\ Cos.\ x = p - b\ Sin.\ y : qM$,

$$\text{hinc } qM = \frac{Cos.\ x\ (p - b\ Sin.\ y)}{Sin.\ x};$$

$$\text{ergo } DM = qM - qD = \frac{Cos.\ x\ (p - b\ Sin.\ y)}{Sin.\ x} - b\ Cos.\ y =$$

$$\frac{p\ Cos.\ x - b\ Sin.\ y\ Cos.\ x - b\ Sin.\ x\ Cos.\ y}{Sin.\ x} = \frac{p\ Cos.\ x - b\ Sin.\ (x + y)}{Sin.\ x};$$

simili modo sequitur ex triangulis pLB et BqD

$$CL = \frac{p\ Cos.\ y - a\ Sin.\ (x + y)}{Sin.\ y}.$$

Ergo habemus sequentem aequilibrii conditionem:

$$P : Q = DM : CL.$$

Id est: *si pondera sint inter se in ratione inversa linearum* DM *et* CL, *aderit stabile aequilibrium* (12).

Haec igitur est conditio generalis, quae valet, quaecunque sint lineae a, b, c, d, e et p: his autem datis determinatam magnitudinem habebit angulus x. Ille autem, ut monuimus, facili ratione ex aequationibus supra inventis non determinatur: atque illa determinatio tum etiam est impedita, si alias conditiones adferamus, sive ex figura ipsa, sive ex Mechanices principiis quaesitas; ita ut melius videatur, hic subsistere, quam considerationes inire, quibus nil proficimus, et quibus bonae horae consumuntur. Cum etiam non opus sit indagare, utrum valor ipsius x, revera praebeat maximam distantiam, centrum gravitatis inter, atque horizontalem lineam AB: illam enim proprietatem ad quaestionem solvendam statuimus.

23. Observatio V. Quae huc usque tradita sunt Exempla, semper ejusmodi fuerunt, ut valor ipsius x ex aequatione $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ facile resolveretur, utpote hae aequationes erant primi gradus. Sin autem in his aequationibus potestates ipsius x adessent, ideoque aequatio haberetur superioris gradus, constat, talem aequationem, si summae potestatis exponens sit n, praebere n valores ipsi x: hi valores ejusmodi esse possunt, ut singuli praebeant valorem positivum aut negativum ipsi $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; ergo videtur ut hoc casu quamplura maxima et minima locum obtinere possint, cum tamen in eadem functione unum tantum maximum, unumque minimum adesse possit. Hoc autem plerumque sequitur, ex forma particulari functionum, quae diversis conditionibus simul parere possunt; sive potius, si tales functiones referantur ad problemata, eadem functio ad pleraque problemata simul per-

(12) Cf. Cl. de Gelder, *Beginselen der Stelkunst*, II Afd. V Hoofdst. 22 Vraagstuk, bl. 307—308 in fine, Edit. 1.

pertinere potest, quae problemata, arcte cognata sunt; sive tribuendum est transformationi cuidam, quae in data functione adhibita est, et ob quam, omnes valores inventi locum habere nequeunt. Et tum, ut justum maximum aut minimum indagetur, consulendum erit, quinam valores ipsius x cum problematis natura conveniant. Optime hoc illustrabitur sequentibus Exemplis.

24. EXEMPLUM 9. *In dato circulo Fig. 12. inscribere Triangulum, quod habeat maximam aream, omnium triangulorum quae in eodem circulo collocari possunt: ita autem ut angulus* B *sit duplo angulo* A *aequalis?*

Ponatur radius circuli $= b$, $\angle A = x$, erit $\angle B = 2x$, et $\angle C = 180° - 3x$. Demittatur ex centro M perpendiculum MD in latus AB, erit, ductis lineis MA, MB, MC, AD = AM . *Sin.* AMD sed $\angle$ AMD = $\angle$ACB (13), ergo AD = $\frac{1}{2}$AB = b *Sin.* $(180° - 3x) = b$ *Sin.* $3x$, et AB = $2b$ *Sin.* $3x$;
ergo si ponatur diameter circuli a, erit AB = a *Sin.* $3x$.
Simili modo erit

$$BC = a \; Sin.\, BAC = a \; Sin.\, x; \qquad AC = a \; Sin.\, ABC = a \; Sin.\, 2x;$$

unde exstat haec proprietas: *latus quodcunque trianguli, in circulo inscripti, aequalis est circuli diametro, multiplicato per sinum anguli, huic lateri oppositi.*

Area trianguli aequalis est huic producto

$$\tfrac{1}{2}AC \times BC \,.\, Sin.\, BCA,$$

id est, si area vocetur y,

$$y = \tfrac{1}{8}a^2 \; Sin.\, x \,.\, Sin.\, 2x \,.\, Sin.\, 3x.$$

Est autem

$$Sin.\, x = Sin.\, x,$$
$$Sin.\, 2x = 2 \; Sin.\, x \; Cos.\, x,$$
$$Sin.\, 3x = (4 \; Cos.^2 x - 1) \; Sin.\, x : (14),$$

ergo

$$y = a^2 \; Sin.^3 x \; Cos.\, x \, (4 \; Cos.^2 x - 1) \; \ldots \; (a),$$

et haec functio maximum valorem acquirat oportet. Si differentietur habemus:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^2 \; Sin.^2 x \, [3 \; Cos.^2 x - Sin.^2 x] \, (4 \; Cos.^2 x - 1) - 8a^2 \; Sin.^4 x \; Cos.^2 x = 0.$$

Ergo cum dividi possit per a^2 *Sin.*$^2 x$, erit,

$$(3 \; Cos.^2 x - Sin.^2 x)\,(4 \; Cos.^2 x - 1) - 8 \; Sin.^2 x \; Cos.^2 x = 0, \text{ et } Sin.^2 x = 0.$$

Sin.$^2 x = 0$ autem rejiciendus est, quoniam angulus A nullus esse nequit, altera autem aequatio, si rite reducatur, obtinemus tandem:

$$24 \; Cos.^4 x - 16 \; Cos.^2 x + 1 = 0,$$

quae si methodo cognito resolvatur, erit,

$$Cos.\, x = \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{(12 \pm 3\sqrt{10})},$$

et

(13) Vid. Cl. de Gelder, *Beginselen der Meetkunst*, V Boek, XX Stelling.
(14) Vid. Cl. de Gelder, op. modo cit. VIII Boek, XIII Stelling.

et quatuor valores quos ipsa x habet, erunt:

$$x = 30^\circ\ 25'\ 9'' \;\ldots\ldots\; \text{sive } x = 140^\circ\ 34'\ 51'',$$
$$x = 71^\circ\ 52'\ 18'' \;\ldots\ldots\; \text{sive } x = 108^\circ\ 7'\ 42''.$$

Porro si in differentiali prima loco $\text{Sin.}^2 x$ substituatur $(1 - \text{Cos.}^2 x)$, erit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^2 (1 - \text{Cos.}^2 x)(4\,\text{Cos.}^2 x - 1)^2 - 8a^2\,\text{Cos.}^2 x\,(1 - \text{Cos.}^2 x) =$$
$$a^2 (1 - \text{Cos.}^2 x)(16\,\text{Cos.}^4 x - 16\,\text{Cos.}^2 x + 1),$$

ex ea porro invenitur:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2\,[144\,\text{Cos.}^4 x - 160\,\text{Cos.}^2 x + 34]\,\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x.$$

In hac aequatione differentiali, valores inventi ipsius x substitui oportent, ut de maximo aut minimo judicium feramus.

Invenitur autem ex

$$\text{Cos.}\,x = +\tfrac{1}{6}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})} \ldots \text{Sin.}\,x = +\tfrac{1}{6}\sqrt{(24 - 3\sqrt{10})},$$
$$\text{Cos.}\,x = +\tfrac{1}{6}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})} \ldots \text{Sin.}\,x = +\tfrac{1}{6}\sqrt{(24 + 3\sqrt{10})},$$
$$\text{Cos.}\,x = -\tfrac{1}{6}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})} \ldots \text{Sin.}\,x = +\tfrac{1}{6}\sqrt{(24 - 3\sqrt{10})},$$
$$\text{Cos.}\,x = -\tfrac{1}{6}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})} \ldots \text{Sin.}\,x = +\tfrac{1}{6}\sqrt{(24 + 3\sqrt{10})};$$

hinc invenitur

$$\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x = +\tfrac{1}{12}\sqrt{(22 + 4\sqrt{10})},$$
$$\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x = +\tfrac{1}{12}\sqrt{(22 - 4\sqrt{10})},$$
$$\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x = -\tfrac{1}{12}\sqrt{(22 + 4\sqrt{10})},$$
$$\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(22 - 4\sqrt{10})}.$$

Porro, cum

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos.}\,x = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{(12+3\sqrt{10})}\\ \text{Cos.}\,x = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{(12+8\sqrt{10})}\end{array}\right\}\text{Convenit}\left\{\begin{array}{l}\text{Cos.}^2 x = +\tfrac{1}{12}(4+\sqrt{10})\ \text{et}\ \text{Cos.}^4 x = \tfrac{1}{72}(13+4\sqrt{10}),\\ \text{Cos.}^2 x = +\tfrac{1}{12}(4-\sqrt{10})\ \text{et}\ \text{Cos.}^4 x = \tfrac{1}{72}(13-4\sqrt{10}),\end{array}\right.$$

si hae functiones in secunda differentiali ponantur, habemus:

Pro $\text{Cos.}\,x = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})}$

fiet $144\,\text{Cos.}^4 x - 160\,\text{Cos.}^2 x + 34 = 6\tfrac{2}{3} - 5\tfrac{1}{3}\sqrt{10}$: id est, *negativa*,

Pro $\text{Cos.}\,x = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})}$ erit

$144\,\text{Cos.}^4 x - 160\,\text{Cos.}^2 x + 34 = 6\tfrac{2}{3} + 5\tfrac{1}{3}\sqrt{10}$: ideoque *positiva*.

Cum prioribus valoribus ipsius $\text{Cos.}\,x$, id est, cum $\text{Cos.}\,x = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})}$ convenit:

$$\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x = \pm\tfrac{1}{12}\sqrt{(22 + 4\sqrt{10})},$$

cum $\text{Cos.}\,x = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})}$ convenit: $\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x = \pm\tfrac{1}{12}\sqrt{(22 - 4\sqrt{10})}$,

ergo fiet

$$1^\circ.\ldots\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm\tfrac{1}{12}\left(6\tfrac{2}{3} - 5\tfrac{1}{3}\sqrt{10}\right)\sqrt{(22 + 4\sqrt{10})}$$
$$2^\circ.\ldots\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm\tfrac{1}{12}\left(6\tfrac{2}{3} + 5\tfrac{1}{3}\sqrt{10}\right)\sqrt{(22 - 4\sqrt{10})}.$$

Et

Et cum in priori aequatione $6\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\sqrt{10}$, est nagativa patet:

$$Cos.\ x = + \tfrac{1}{6}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})} \text{ praebere } maximum,$$
$$Cos.\ x = - \tfrac{1}{6}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})} \ldots\ldots minimum,$$
$$Cos.\ x = + \tfrac{1}{6}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})} \ldots\ldots minimum,$$
$$Cos.\ x = - \tfrac{1}{6}\sqrt{(12 - 3\sqrt{10})} \ldots\ldots maximum.$$

Ergo videntur duo adesse maxima et totidem minima, cum tamen in problemate nostro unum maximum tantum, unumque minimum locum habere queat, videamus ex problematis natura, quodnam sit illud maximum aut minimum.

Conditio, cui problema subjectum est, in eo consistit, ut $\angle B = 2 \angle A = 2x$, et cum exinde sequatur:

$$c = 180^\circ - 3x,$$

patet $3x$ semper minorem esse debere quam 180°; cum vero $x = 39^\circ\ 25'\ 9''$ huic conditioni pareat, neque alii valores ipsius x; sequitur, quoniam invenimus $Cos.\ x = \frac{1}{6}\sqrt{(12 + 3\sqrt{10})}$, id est $x = 39^\circ\ 25'\ 9''$ maximum valorem praebere, id est, aream trianguli fieri maximam, si angulus A trianguli huic valori x aequalis sumatur; sed minimum non adest.

Si autem functionem

$$y = \tfrac{1}{2}a^2\ Sin.\ x\ .\ Sin.\ 2x\ .\ Sin.\ 3x,$$

consideremus tanquam functionem, neque relatam ad quoddam problema, illa functio habebit maximum et minimum. *Maximum* si $x = 30^\circ\ 25'\ 9''$; *minimum* si $x = 71^\circ\ 52'\ 18''$. Namque ut invenerimus duo maxima et duo minima, tamen ad unum separatim rediguntur: quoniam $x = 140^\circ\ 34'\ 51'' = 180^\circ - (39^\circ\ 25'\ 9'')$, eundem *sinum* habet ac $x = 39^\circ\ 25'\ 9''$; et $x = 71^\circ\ 52'\ 18''$, ad eundem *sinum* pertinet, ac $x = 108^\circ\ 7'\ 42''$: duo autem maxima et duo minima exinde orta sunt, quoniam functio, de qua loquimur, transformata est in aliam, hujusmodi

$$y = a^2\ Sin.^3 x\ Cos.\ x\ (4\ Cos.^2 x - 1),$$

quae forma admodum diversa est a priori functione.

25. EXEMPLUM 10. *Iisdem positis, rogetur angulum x ita determinare ut perimeter trianguli evadat maximum?*

Invenimus supra AB $= a\ Sin.\ 3x$; BC $= a\ Sin.\ x$; AC $= a\ Sin.\ 2x$.

Ergo Perimeter $= y$ erit:

$$y = a\ (Sin.\ x + Sin.\ 2x + Sin.\ 3x),$$

et iisdem reductionibus ac in praecedenti exemplo adhibitis:

$$y = 2a\ Sin.\ x\ Cos.\ x\ (1 + 2\ Cos.\ x),$$

ergo cum y maximum fieri debeat, habemus:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2a\ Cos.^2 x\ (1 + 2\ Cos.\ x) - 2a\ Sin.^2 x\ (1 + 2\ Cos.\ x) - 4a(1 - Cos.^2 x)\ Cos.\ x = 0.$$

Quae

Quae si rite transformetur, acquirimus:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6\ Cos.^3 x + 2\ Cos.^2 x - 4\ Cos.\ x - 1 = 0,$$

pone $Cos.\ x = z$, erit

$$6z^3 + 2z^2 - 4z - 1 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\alpha),$$

aequatio tertii ordinis, ex qua valor ipsius x pro maximo determinandus erit. Institutis hoc loco iis, quae in prima observatione dicta sunt, apparet, radices hujus aequationis omnes esse diversos, qua propter hi radices ex aliis fontibus haurire debent: si v. c. aequatio resolvatur secundum methodum approximativam Ill. Lagrange (15), quam resolutionem, brevitatis gratia, hic non describam, obtinemus valorem radicis positivi maximi: $z = + 0{,}78551 = Cos.\ x$,

qui numerus, gradibus expressus, significat: $x = 38^\circ\ 14'\ 11''$.

Ex prima differentiali sequitur:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - 18\ Cos.^2 x\ Sin.\ x - 4\ Cos.\ x\ Sin.\ x + 4\ Sin.\ x,$$

id est, $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = [- 18\ Cos.^2 x - 4\ Cos.\ x + 4]\ Sin.\ x.$$

Cum x minor sit quam 180°, erit $Sin.\ x$ positivus, ergo ex

$$- 18\ Cos.^2 x - 4\ Cos.\ x + 4,$$

recensendum est utrum *maximum* aut *minimum* adsit. Valor ipsius $Cos.\ x$, (si ad numeros integros solummodo attendamus, neque ad fractiones decimales,) praebet, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - 9\ Sin.\ x.$

Ideoque si x sumatur aequalis $38^\circ\ 14'\ 11''$, perimeter trianguli, in circulo inscripti, erit maximum. Inquiramus autem in reliquos radices aequationis finalis (α): cum

$$z = 0{,}78551,$$

hujus aequationis sit radix, erit $z - 0{,}78551 = 0$ ejusdem aequationis factor; si igitur aequatio

$$6z^3 + 2z^2 - 4z - 1 = 0$$

dividamus per $z - 0{,}78551 = 0$, obtinemus

$$6z^2 - 2{,}71306\ .\ z + 1{,}86886 = 0,$$

quae si resolvatur, habemus

$$z = 0{,}22609 \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{- 9{,}38799}.$$

Ergo reliqui radices aequationis (α) sunt imaginarii: et eam ob causam $z = 0{,}78551$, sive $x = 38^\circ\ 14'\ 11''$, praebebit maximum quaesitum.

26. Exemplum II. *Fig.* 13. *Sit* AB *vectis horizontalis et immobilis. Ex extremita-*

(15) Vid. Cl. de Gelder, *Beginselen der Stelkunst*, II. Afdeel. XI Hoofdst. L. B. §. 722. Edit. 1.

tatibus A *et* B *pendeant duo funes* AT *et* BTS, *quibus adnexa sunt trochlea* T *et pondus* S. *Quodsi funis* BTS *circa axem* T *ducatur*, *omnis systema oscillat*, *donec in aequilibrio versetur: quaeritur autem positio ponderis* S *in aequilibrio; posito scilicet*, *neque funes neque trochleam*, *pondere esse praeditam* (16)?

Ex Mechanices fundamentis liquet, aequilibrium stabile tum adfore, cum centrum gravitatis omnis systematis, quantum fieri potuit, descendit: ergo cum funes AT, et BTS, et Trochlea T ponderis experta sit, centrum gravitatis ponderis S, est centrum gravitatis systematis, idque versatur in situ infimo, cum vel maxime a vecte AB est remotum, ergo linea verticalis SU, maximum fiat necesse est.

Pone igitur AU $= x$, AB $= a$; sint longitudines funium AT et BTS, b et c, eritque BU $= a - x$.

$$TU = \sqrt{(AT^2 - AU^2)} = \sqrt{(b^2 - x^2)}.$$

$$BT = \sqrt{(BU^2 + TU^2)} = \sqrt{[(a-x)^2 + (b^2 - x^2)]} = \sqrt{[a^2 + b^2 - 2ax]}.$$

Ergo $TS = BTS - BT = c - \sqrt{[a^2 + b^2 - 2ax]}$,

et $SU = y = TU + TS = c - \sqrt{[a^2 + b^2 - 2ax]} + \sqrt{(b^2 - x^2)}$,

hinc $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{a}{\sqrt{[a^2 + b^2 - 2ax]}} - \dfrac{x}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} = 0$,

unde $a\sqrt{(b^2 - x^2)} = x\sqrt{[a^2 + b^2 - 2ax]}$,

sive $a^2b^2 - a^2x^2 = a^2x^2 + b^2x^2 - 2ax^3$,

vel $2ax^3 - (2a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0 \ldots . (\alpha)$,

haec autem aequatio dividi potest per $x - a$, nimirum:

$$2ax^3 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = (x - a)(2ax^2 - b^2x - b^2a) = 0,$$

ergo radices aequationis differentialis inveniuntur his aequationibus,

$$x - a = 0, \quad 2ax^2 - b^2x - b^2a = 0 \ldots . (\beta),$$

ex prima sequitur $x = a$ atque ex altera $x = \dfrac{b^2}{4a} \pm \dfrac{b}{4a}\sqrt{(b^2 + 8a^2)}$: quandoquidem $\sqrt{(b^2 + 8a^2)}$ major est, quam b, erit $\dfrac{b}{4a}\sqrt{(b^2 + 8a^2)}$ major quam $\dfrac{b^2}{4a}$; ergo radix $x = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b}{4a}\sqrt{(b^2 + 8a^2)}$ erit negativus:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{ax^2\sqrt{(b^2 - x^2)} - ax\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ax)} - a^2 - b^2 + 2ax}{(b^2 - x^2)(a^2 + b^2 - 2ax)};$$

in hâc aequatione, si substituatur $x = a$, erit,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a^3\sqrt{(b^2 - a^2)} - a^2\sqrt{(b^2 - a^2)} - (b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)^2} = \frac{a^3 - a^2 - \sqrt{(b^2 - a^2)}}{(b^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - a^2)}}.$$

Si $x = a$ praeberet maximum, pondus S penderet in situ verticali BS et oporteret ut co

(16) Desumsi hoc exemplum ex opere saepius citato Ill. de l'Hopital, Sect. III. Exemp. XII.

eo casu $b = aA$ major sit quam $a = AB$. Sed cum ex secunda differentiali pateat $x = a$ praebere minimum, iste valor excludamus necesse est; quoniam 1°. minimum adesse nequit et 2°. pondus S eo situ, sponte sua in aequilibrio versatur, sine opera trochleae, quod in nostro exemplo minime postulatur.

Si radices $x = \frac{b}{4a} + \frac{b}{4a}\sqrt{(b^2 + 8a^2)}$ et $x = -\frac{b^2}{4a} - \frac{b}{4a}\sqrt{(b^2 + 8a^2)}$ separatim in aequatione secundae differentialis substituantur, patebit priorem valorem ipsius x reddere eam differentialem relationem negativam, altero autem illam positivam fiere. Videtur igitur maximum adesse atque minimum: sed praeter quod minimum adesse nequeat, ex eo etiam hoc patet, quod $x = \frac{b^2}{4a} - \frac{b}{4a}\sqrt{(b^2 + 8a^2)}$, quamquam satisfaciat aequationi (β), tamen aequationi (α) non convenit: huic aequationi alter valor ipsius x satisfacit; sed quoniam orta est aequatio (α) ex transformatione aequationis, in qua inerant quantitates irrationales, eam ob causam primus valor locum habere semper nequit (17). Ergo hic rejiciendus est, et si sumatur $AU = x = \frac{b^2}{4a} + \frac{b}{4a}\sqrt{(b^2 + 8a^2)}$, erit linea verticalis SU, linea directionis ponderis S. De l'Hopital alio etiam modo solvit quaestionem, qua ratione pervenit ad hanc enunciationem: *centrum gravitatis habere situm infimum, si anguli* BTA *et* ATS *sint aequales.*

27. Casus, quem in hac observatione memoravimus, et, ut opinor, satis superque illustravimus, saepissime locum habet. Rarissime enim aequationes differentiales, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ sunt primi gradus. Sic etiam solutio hujus problematis pendet a solutione aequationis tertii gradus. *In dato globo collocare conum rectum, ita ut cubus, qui in hoc cono potest includi, maximam soliditatem acquirat?* Et sic etiam in plerisque aliis casibus, sperare non possumus, fore, ut solutio pendeat ab inventione radicum aequationis, quae, ad minimum, est tertii gradus.

28. Observatio VI. Quamquam theoria exposita generalis sit, ideoque valeat, quaecunque sit relatio inter variabiles x et y, sive haec relatio exhibeatur aequatione algebraica, sive transcendentali, tamen unicum exemplum ponamus de altero casu.

Exemplum 12. *Invenire maximas aut minimas ordinatas curvae transcendentalis* ABC Fig. 14, *cujus aequatio est* $y = x^x$, *posito* OX *axem abscissarum?*

Ex curvae figura apparet, cum pars BC superne ad infinitum procedat, y obtinere non posse maximum valorem; sed in puncto infimo D, y habebit minimum valorem.

Ponatur $x = 0$, erit $y = AO = 0^0 = 1$,

ponatur $x = 1 = OP$, erit $y = PB = 1^1 = 1$;

ergo valor ipsius x, qui reddit y minimum, cadat inter 0 et 1 necesse est.

Ut

(17) Vid. de Gelder, *Begins. Stelk.*, §. 517. pag. 226.

Ut autem proposita functio differentietur, primum ope Logarithmorum reducetur ad hanc functionem $Log.\ y = x\ Log.\ x.$

Hujus differentialis est

$$\frac{\partial y}{y} = \partial x\ Log.\ x + \partial x,$$

sive $$\frac{\partial y}{\partial x} = y\ Log.\ x + y = x^x\ Log.\ x + x^x,$$

ergo pro maximo aut minimo erit

$$y\ Log.\ x + y = 0 \quad \text{sive } Log.\ x = -1.$$

Ergo cum sint nostro Logarithmi casu Neperiani, si e significet basin *Logarithmorum Neperianorum* sive *Hyperbolicorum*, erit, ob $Log.\ e^x = x$, $\quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$; est autem $e = 2{,}7182$ caet. (18), ergo $\frac{1}{e}$ erit major quam 0 et minor quam 1, uti monuimus. Et quoniam differentialis secunda, nimirum

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x^x \left[\frac{1}{x} + (1 + Log.\ x)^2\right],$$

substituto $x = \frac{1}{e}$, fiat positiva, omnino minimum aderit.

In hoc exemplo adfuit aequatio

$$Log.\ x + i = 0,$$

atque ex ea facile inventus est valor ipsius x: sed aequationes transcendentales, ad quas in quaestionibus de maximis et minimis pervenire possumus, majoribus saepe difficultatibus in resolutione laborant quam si ad aequationem superioris gradus ducamur: etenim ita involutae tales aequationes esse possunt, ut in series devolvi debeant, ad valorem quantitatis variabilis determinandum; qui tamen, si hoc accidat, non nisi appropinquando determinatur: immo si tales series vel maxime divergant vel si aequationes admodum sint involutae, vix, ac ne vix quidem, praebere possumus solutionem.

Hujus casus specimen datur in hoc problemate:

Inter omnes sphaeroïdes, quae eandem habent soliditatem, eam invenire quae maximam habeat superficiem?

Hujus problematis solutionem hic non praebeam, quippe quae longa sit, sed inveni, si a^3 significet datam soliditatem, et t semi-axis major sphaeroïdis, u ejusdem minor axis, inveni inquam, sequentes aequationes ad determinandas t et u:

1°. . . . . $\frac{4}{3}\pi t^2 u = a^3$,

2°. $$\pi t^3[2(16\pi^2 t^6 - 9a^4) + 9a^2] - 9a^4\left[\sqrt{(16\pi^2 t^6 - 9a^4)}\ Log.\left(\frac{\sqrt{(16\pi^2 t^6 - 9a^4)} + 4\pi^2 t^3}{3a^2}\right)\right] = 0,$$ et

(18) Vid. Cl. de Gelder, *Stelk.*, §. 800. bladz 447.

et quis est qui alteram aequationem resolvat?

29. Observatio VII. Quod ad functiones implicatas unius variabilis, in his, haud raro est, aequationem differentialem $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, (quae, ut x et y determinentur, conjungi oportet cum functione data $\phi(x, y) = 0$,) vel maxime implicatam esse, ita ut opiner, casus, quibus ejus resolutio facilis est, profecto haud multos esse: etenim cum omnes aequationes referri possint ad curvas lineas, si tantummodo de curvis agamus, nullae sunt, praeter sectiones conicas, quae facilem solutionem admittunt; harum enim curvarum aequationes sunt secundi gradus, hujusmodi,

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0,$$

quodsi aequationes implicatae, ad alias curvas pertineant, simul etiam erunt gradus superioris.

Casus autem singularis quo aequationes implicatae, faciliori quodam modo tractari possunt, omittendus non est: nimirum si functiones ita constitutae sint, ut ipsae variabiles in iis non occurrant implicatae, id est ut in iis nulli termini adsint hujus formae $Ax^m.y^n$, sed si hae variabiles omnes a se invicem sint separatae, simplicior aliquantum fit regula; namque cum tales functiones in hâc generali functione contineantur

$$X + Y = 0,$$

ita ut X sit functio ipsius x, Y functio ipsius y, aut vice versa (19), si maximum aut minimum quaeratur functionis

$$X + Y = 0,$$

utraque functio tum X tum Y fiat maximum aut minimum necessarium est; si autem idem rogetur de functione

$$X - Y = 0,$$

oportet ut pro maximo, X evadat maximum, Y autem minimum, et pro minimo omnino requiritur ut tum X tum Y fiant maxima. Itaque ratio fit simplicior: namque ut totius functionis maximum aut minimum habeatur, sufficiet si utriusque functionis maxima et minima determinentur et convenienter functionis formae conjungantur (20).

30. Observatio VIII. Ad maximum aut minimum indicandum, opus est ut investigemus utrum $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, aut, si haec evanescat, evanescente etiam $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, ut $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ et sic porro, habeat valorem negativum aut positivum: fecimus hoc in omnibus exemplis, huc usque allatis, scilicet theoriae illustrandae gratia; sed semper hoc non requiritur: praesertim in

(19) Ejusmodi functio est v. c. $y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y \pm (x^3 - 3x^2 - 3x) = 0$; proprie talis functio non est implicata, sed tamen ad eas referri saltem potest, quandoquidem melius sic tractatur, quam utpote functio simplex $y = \phi(x)$.

(20) Cf. Eulerus, *Op. Cit.* Cap. X. §. 286. ubi hujus casus exempla abunde occurrunt.

in iis casibus non opus est tali investigatione, in quibus *a priori*, sine ullo dubio sciamus, maximum adesse debere, minimum autem non posse, et vicissim minimum locum habere, neque maximum: namque si hoc certo sciamus, profecto ille valor ipsius x, ex $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ inventus, talis erit, qui illud maximum aut minimum producat: neque tum secundae differentialis investigatio necessaria est: dummodo eos casus excipias, quibus x quamplures diversos valores acquirit, qui de maximo aut minimo dubium aliquod ponunt.

Sic etiam de compluribus aequationibus judicium ferre possumus utrum valores maximos aut minimos attingere possint, nec ne, et nonnumquam etiam valor ipsius maximi aut minimi oculos incurrit; quibus casibus igitur nulla regulae expositae applicatione opus est.

Sic verbi causa ex forma generalis aequationis, quae pertinet ad curvas *parabolicas*,

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ caet.}$$

cernere licet, y habere minimum valorem $= a$, si x ponatur zero: maximum autem non obtinet locum, quoniam x ad infinitum crescere potest, sine eo, quod aliquando decrescat, sive aliquem accretionis limitem attingat.

Sit

$$y = \frac{M}{a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ caet.}}$$

aequatio generalis curvarum *Hyperbolicarum*. Si aequatio $a + bx +$ caet. habeat radices reales, quibus illa aequatio nihilo aequales fiat, aequatio posita toties fiet ∞, quoties talis radix occurrit, ideoque y non gaudebit valore maximo: et quandoquidem, si x induat valorem negativum, y minuitur ad infinitum, neque etiam minimum habebit locum. Verum si radices aequationis $a + bx$ caet. omnes sint imaginariae, nullus adest valor realis, quo illa aequatio nihilo aequalis fieri potest, ergo si hoc ita sit, y ad infinitum non crescit, sed aucta x tandem decrescet y ad infinitum; idque obtinet sive x sumatur positiva sive negativa; quapropter tali aequationi maximum quidem, non autem minimum inest. Quid vero sit illud maximum aut minimum, id apparet ex applicatione theoriae expositae: namque ex forma aequationis, certo modo hoc non colligitur.

Simile ratiocinium valet de aequationibus hujusmodi

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \text{ caet.}}{a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ caet.}},$$

quae pertinent ad curvas *Hyperbolico-parabolicas*; et de aliis aequationibus, quas variis modis ponere non difficile est.

31. Observatio IX. Quae huc usque dicta sunt, satis, ut opinor, theoriam expositam illustrant, et quomodo in nonnullis casibus agendum sit, evidenter monstrant; ideoque huic primo capiti finem imponere possumus: sed abesse non possum, quin breviter jam moneam, quo pulchro elegantique modo, *summus* Eulerus, maximorum et minimorum theoria usus est, ad indagandum, *utrum aequatio quaedam superioris gra-*

 dus,

dus, radices habeat reales seu imaginarias, et qui sint limites intra quos hi radices comprehenduntur.

Fuse prolixeque hanc materiam tractare non possum, quippe a scopo aliquantum remotam; sufficiat breviter explicasse, quibus principiis nititur investigatio.

Sit igitur $z = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} +$ caet.

aequatio generalis superioris gradus. In hac aequatione si x successive aequatur numeris 1 . 2 . 3 caet., acquiret z quosdam valores; quodsi x tanquam abscissam, z utpote ordinatam curvae lineae spectetur, erit curva, ad quam haec aequatio pertinet, talis, qualis in *Fig.* 15. delineata est. Si aequatio habeat radices reales, ista curva ABCDEFGH, secabit abscissarum lineam OX in tot punctis a, b, g caet., quot adsunt radices reales; namque si adsit radix realis, fiet hâc radice aequatio generalis nihilo aequalis (21), ergo erit $z = 0$, id est, hoc casu curva secabit abscissarum axem in aliquo puncto; et hoc perspicue toties accidit, quoties z fit nihilo aequalis: tot igitur puncta et curva ipsa et abscissarum linea habebunt communia, quot sunt reales radices.

Si autem adfuerint radices imaginariae, his solis valoribus imaginariis aequatio proposita evanescat, et nullus adsit valor realis, quo nihilo aequalis fiat, necesse est. Ergo hoc casu, curva neutiquam secabit abscissarum axem.

Jam vero sit $x = Oa = p$ radix realis, quo aequatio evanescit; sit item $x = q = Ob$ alia radix; ergo intra limites $x = p$ et $x = q$, z primum est 0, dein crescit, sed cum mox, posita $x = q$, iterum evanescat, oportet ut intra limites crescat, deinde decrescat, ideoque intra hos limites, maximum quemdam valorem cF attingat: quod si z intra $x = p$ et $x = q$, habuerit valorem negativum, accipiet z, posita $x = q + a$, valorem positivum.

Est autem perspicuum hos valores maximos Fc, Ef, Gd, ipsius z nullos alios esse, quam radices aequationis differentialis

$$\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1} + (n-1)\,Ax^{n-2} + (n-2)\,Bx^{n-3} + \text{caet.} = 0.$$

Si aequatio proposita habeat radices reales, habeat aequatio differentialis etiam reales radices necessarium est. Fac igitur hos radices aequationis differentialis esse α, β, γ caet. ita ut α sit maximus, reliqui autem ordine minores sint: jam vero, si, posita in aequatione generali $x = \alpha = Of$, fiat v. c. $z = A' = Ef$ positiva, atque si, posita $x = \beta = Oc$, fiat $z = B' = c$F negativa, perspicuum est, intra limites α et β, x habere talem valorem, quo aequatio generalis nihilo aequalis fiat; namque ut quantitas z, a positivo statu, evadat negativa, oportet ut in aliquo puncto a per zero, ut ita dicam, transierit; ergo intra limites $x = \alpha$ et $x = \beta$ aderit radix realis. Si autem ex duobus valoribus $x = \gamma = Od$ et $x = \delta = Oe$, z maneat positiva aut ne-

(21) Vid. Cl. de Gelder, *Begins. der Stelkunst*, II Afd. VIII Hoofdst. §. 636. pag. 331.

negativa, indicium hoc erit, curvam lineam, intra limites γ et δ nusquam secare lineam OX, ideoque intra hos limites, nullus aderit radix realis, sed illa erit imaginaria.

Ex his quam luculentissime apparet, qua ratione ex radicibus aequationis differentialis, judicare possumus, utrum proposita seu primitiva aequatio habeat radices reales seu imaginarias, et qui sint harum radicum limites.

Sit *v. c.* $x^2 + Ax + B = z$, aequatio generalis secundi gradus, erit

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + A = 0.$$

Unde $$x = -\tfrac{1}{2}A.$$

posito in data aequatione $x = -\frac{1}{2}A$, erit

$$z = \tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{1}{2}A^2 + B = B - \tfrac{1}{4}A^2,$$

posito $x = 0$ erit $z = B$; et hinc concluditur, si B est positiva, $B - \frac{1}{4}A^2$ autem negativa, id est $\frac{1}{4}A^2 > B$, aequationem habere radicem quae major est quam B, minor quam $\frac{1}{4}A^2 - B$. Sin autem $B - \frac{1}{4}A^2$ sit positiva, id est $B > \frac{1}{4}A^2$, erunt radices imaginariae; et vice versa (22).

Eulerus fuse de his omnibus agit in suo opere citato, Cap. XII et XIII, et quasdam applicationes profert ad aequationes cubicas et biquadratas.

Caeterum, quamvis elegans profecto sit haec applicatio theoriae de *maximis* et *minimis*, tamen confitendum est, nos cum nullo magno fructu hanc methodum, in aequationum resolutione adhibere posse; quandoquidem et ipsa resolutio aequationum differentialium institui debet, et praesertim cum adsint aliae Methodi, quibus, ni citius, at certe accuratius, radicum limites indagantur.

CAPUT SECUNDUM.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM DUARUM VARIABILIUM QUANTITATUM.

1. Exposita itaque theoria de maximis et minimis functionum unius variabilis, $y = \phi(x)$ et $\phi(x, y) = 0$, facile nunc etiam indagatur, quid fieri oporteat, ut functiones quae duas quantitates variabiles continent, (et quae vulgo sic proponuntur: $z = \phi(x, y)$ vel $\phi(x, y, z) = 0$,) maximos aut minimos valores attingant. Etenim cum quaevis functio duarum variabilium, duplici modo differentiari possit, scilicet, po-

(22) Cf. Cl. de Gelder, *Begins. der Stelk.*, II Afd. III Hoofdst. §. 509 et 510. pag. 222.

ponendo tum x variabilem, et y constantem, tum y variabilem et x constantem, sive ponendo utramque quantitatem et x et y, simul variabilem, eam ob causam, si hac consideratione utamur, regulae, supra expositae, sufficere videntur ad componendas regulas, quae spectant theoriam de *maximis* et *minimis* functionum duarum variabilium. Namque si in functione $z = \phi(z, y)$ ponamus y constantem, x autem variabilem, functio illa omnes habet proprietates functionis unius variabilis, ergo si agatur de maximo aut minimo, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ esse oportet, atque ex valore positivo aut negativo ipsius $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, minimum aut maximum discernendum est, *caetera*. Contra si x ponatur constans, y variabilis, simili modo oportet ut $\frac{\partial z}{\partial y}$ fiat nihilo aequalis, et in illo maximi aut minimi puncto $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ negativa aut positiva evadat necesse est. Igitur si dictae convenientiae rationem habeatur, sponte sequitur, si x et y simul variabiles spectentur, etiam pro maximo aut minimo $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ simul evanescere debere: quodsi valores ipsarum x et y, ex his differentialibus relationibus hausti, ita sint, ut $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ simul faciant negativas aut positivas, indicium aderit maximi aut minimi: si evanescant, recurrendum est ad tertiam differentialem, et sic porro. Sin autem hae conditiones non inveniantur, certi sumus nullum maximum aut minimum adesse.

2. Hoc modo eaedem regulae, quae nobis inserviebant ad maximum aut minimum functionum unius variabilis investigandum, etiam adhiberi posse videntur in functionibus duarum variabilium.

Revera si in tali functione quantitates variabiles x et y, alternatim varientur, regulae indicatae prorsus sufficiunt: sed cum istae variationes simul fiunt, oportet quidem, ut $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, simul evanescant, sed, uti mox ostendemus, fieri poterit ut, quamquam $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ simul sint negativae aut positivae, tamen nullum maximum aut minimum adsit.

3. Quemadmodum indicavimus, sic Eulerus rem consideravit (1). Lagrange autem primus fuit, qui demonstraverit quod dictum est, nimirum, indicium maximi aut minimi, non solum ex valoribus positivis aut negativis ipsarum $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, dijudicandum esse, sed ad has conditiones aliam etiam accedat, prorsus oportere. Exposuit hanc Theoriam

(1) Vid. ejus opus cit. *Instit. Calc. Diff.* Cap. XI. §. 290 sqq.

riam in Tomo primo *Miscellaneorum Taurinensium* (Melanges de Turin) pag. 28 sqq. *Recherches sur les Methodes de Maximis et Minimis.* Postea alio modo idem explicavit in ejus opere *Theorie des fonctions analytiques*, Part. II. Chap. XI. N°. 54 sqq. pag. 261. Ut mihi autem videtur prima expositio, utpote magis ex rei natura petita, elegantior est; quare et ego illam sequar, quae traditur in *Miscellaneis Taurinensibus.* In Theoria exponenda, duplici modo functiones duarum variabilium considerabo, et primum quidem agam:

§. I.

De maximis et minimis functionis simplicis $z = \phi\,(x, y)$.

4. Si in functione $z = \phi\,(x, y)$, duo adsint valores $x = p$ et $y = q$, quae praebent maximum aut minimum valorem ipsi z, semper erit certum maximi aut minimi judicium, si, substitutis iterum loco x et y, duobus valoribus majoribus $x = p + i$, $y = q + h$, et duobus minoribus $x = p - i$ et $y = q - h$, ipsa z, his substitutionibus, pro maximo fiat minor, pro minimo autem major, quam fuit ex prima suppositione $x = p$ et $y = q$ in maximo aut minimo. Hoc fundamento omnis Theoria de maximis et minimis, sive functiones contineant unam, sive duas, sive plures variabiles, nitatur, omnibus liquet. Ergo, valor ipsius functionis ante et post maximum semper decrescit, cum ante et post minimum increscat: quapropter utrumque incrementum quod ipsa functio ante et post maximum capit erit negativum, et quod ante et post minimum habet, erit positivum.

Sin autem x et y augeantur quantitatibus i et h, augetur ipsa functio quantitate ω; et valor generalis hujus incrementi invenitur ope Theorematis Tayloriani, quod in functionibus duarum variabilium sic sese habet (2).

$$\omega = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot i + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot h\right] + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot i^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y}\cdot ih + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot h^2\right] + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot$$
$$\left[\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\cdot i^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\cdot i^2 h + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\cdot ih^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\cdot h^3\right] + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot$$
$$\left[\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\cdot i^4 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y}\cdot i^3 h + 6\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}\cdot i^2 h^2 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3}\cdot ih^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\cdot h^4\right] + \text{caet.}\ (\alpha).$$

pro quo, brevitatis causa, scribere liceat,

$$\omega = [Ai + Bh] + \tfrac{1}{2}\,[Ci^2 + Dhi + Eh^2] + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,[Fh^3 + 3Gi^2h + 3Hih^2$$
$$+ Ih^3] + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\,[Ki^4 + 4Li^3h + 6Mi^2h^2 + 4Nih^3 + Oh^4] + \text{caetera}\ (\alpha).$$

Si autem x et y diminuantur, quantitatibus i et h, invenietur incrementum aut decrementum ipsius functionis, hac serie:

$\omega' =$

(2) Vid. de Gelder, *Different. Reken.*, §. 73. pag. 171.

$$\omega' = -[Ai + Bh] + \tfrac{1}{2}[Ci^2 + Dhi + Eh^2] - \frac{1}{1.2.3}[Fi^3 + 3Gi^2h + 3Hih^2 + Ih^3] + \frac{1}{2.3.4}[Ki^4 + 4Li^3h + 6Mi^2h^2 + 4Nih^3 + Oh^4] + \text{caetera } (\beta).$$

5. Jam vero ponatur functionem propositam acquirere valorem maximum aut minimum, si x et y adipiscentur valores p et q, erunt ω et ω' valores incrementorum ipsius functionis, ante et post maximum aut minimum, ea autem conditione ut A, B, C, caetera exhibeant relationes differentiales totius functionis, posito $x = p$ et $y = q$. Cum igitur hae sint relationes differentiales, quae locum habent si functio sit maximum aut minimum, videamus ex comparatione illorum incrementorum, atque ex fundamento theoriae, quid evadant in maximo et minimo functionis valore. Sumamus eam ob causam incrementa h et i, ipsarum x et y, tam exigua, ut unusquisque terminus serierum (α) et (β) multo major sit, quam summa omnium terminorum subsequentium: hoc modo valor positivus aut negativus ipsius incrementi dijudicatur ex valore positivo aut negativo unius termini: habemus enim hoc casu:

$$\text{pro } x = p + i \text{ et } y = q + h, \text{ erit } \omega = +[Ai + Bh],$$
$$\text{pro } x = p - i \text{ et } y = q - h, \text{ erit } \omega' = -[Ai + Bh].$$

Si autem $x = p$ et $y = q$ praebeant maximum aut minimum, oportet, ut fiant et ω et ω' utrumque negativum aut positivum. Est autem ω positivum, ω' negativum, ergo cum hoc fieri nequeat, oportet, ut si terminus $[Ai + Bh]$ in maximo aut minimo habeat quemdam valorem, ille valor ejusmodi sit, qui nil influat in valorem positivum aut negativum ipsorum incrementorum ω et ω': idque nullo alio modo efficitur quam ponendo:

$$[Ai + Bh] = 0,$$

cui aequationi satisfieri nequit, nisi fiant Ai et Bh separatim nihilo aequales, et cum h et i sint determinati valoris, sequitur $Ai + Bh$, nihilo aequalis fieri non posse, nisi sit $A = 0$, et $B = 0$. Igitur pro maximo aut minimo sequentes aequationes adquirimus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

ex quibus igitur, aeque ac in superiori capite, tales valores ipsarum x et y colliguntur, qui positam functionem maximum aut minimum faciunt.

Si autem termini priores serierum (α) et (β) evanescant, opus est ut ex secundis terminis dijudicemus, utrum incrementa ω et ω' fiant negativa aut positiva: ergo habemus casu maximi aut minimi:

$$\text{ante } \textit{maximum} \text{ aut } \textit{minimum } \omega = +[Ci^2 + 2Dih + Eh^2],$$
$$\text{post } \textit{maximum} \text{ aut } \textit{minimum } \omega' = +[Ci^2 + 2Dih + Eh^2],$$

sic igitur incrementa ω et ω' ante et post maximum aut minimum eadem sunt. Et quandoquidem haec incrementa pro maximo negativa, pro minimo positiva esse debent, sequitur, maximum aut minimum adesse, prouti

Ci²

$$Ci^2 + 2Dih + Eh^2$$

habeat valorem negativum aut positivum. Hoc postulatum sponte datur, si termini Ci^2, $2Dih$, Eh^2 separatim sint negativi aut positivi: sed exinde, generali modo, statuere non possumus, quid proprie fiant relationes differentiales hujus secundi termini.

Namque quamvis i^2 et h^2 semper sint positivae, ideoque Ci^2 et Eh^2 fiant negativi aut positivi, prouti C et E negativae aut positivae sunt, tamen non apparet, terminum $2Dih$ fieri positivum aut negativum prouti D sit positiva aut negativa; quandoquidem *a priori* concludere non possumus, quid fiat productum $i \times h$, positivum aut negativum; ita ut, si pro maximo Ci^2 et Eh^2 fiant negativi, $2Dih$ positivus esse possit, et adeo magnus ut sit multo major, quam $Ci^2 + Eh^2$: quo casu terminus secundus serierum (α) et (β) induet valorem positivum loco negativi.

Quandoquidem igitur ambiguum sit quid obtinere debeat, ut ille secundus terminus fiat negativus aut positivus, necesse est ut ei aliam formam induamus, ex qua tale judicium certo modo feratur: eaque forma ejusmodi esse debet, ut, illius ope, absque valoribus h et i, statuamus, quid obtinere debet, ut $Ci^2 + 2Dih + Eh^2$ evadat negativus aut positivus. Talem transformationem debemus sagacissimo Lagrange, et sic sese habet:

$$Ci^2 + 2Dhi + Eh^2 = Ci^2 + 2Dhi + Eh^2 + \frac{D^2h^2}{C} - \frac{D^2h^2}{C}$$

$$= Ci^2 + C.\frac{2D}{C}hi + C.\frac{D^2h^2}{C^2} + Eh^2 - \frac{D^2}{C}h^2 = C.\left[i + \frac{D}{C}h\right]^2 + \left[E - \frac{D^2}{C}\right]h^2.$$

Ergo cum factores $\left[i + \frac{D}{C}h\right]^2$ et h^2, semper habeant positivum valorem, oportet ut

1°. pro *maximo* C et $\left[E - \frac{D^2}{C}\right]$ fiant negativi,

2°. pro *minimo* C et $\left[E - \frac{D^2}{C}\right]$ fiant positivi;

namque si hoc obtineat, totus secundus terminus, et ob eam causam incrementa ω et ω' induunt valorem negativum aut positivum.

Si agatur de maximo, erit C negativa et $-\frac{D^2}{C}$ positivus: igitur ut fiat $E - \frac{D^2}{C}$ negativus, E sit negativa, et simul major quam $\frac{D^2}{C}$ necesse est: postrema autem conditio eodem redit ac si ponamus productum EC majus esse debere quam D^2. De minimo idem ratiocinium valet, sed ita ut E sit positiva: habemus igitur hanc conditionem, qua maximi aut minimi praesentia non modo indicatur, sed etiam maximum a minimo distinguitur:

1°. Pro *maximo* requiritur ut C et E habeant valores negativos.

2°. Pro *minimo* iidem valores C et E positivi esse debent.

3°. Sed ut maximum aut minimum adsit praesertim opus est, ut haec conditio locum habeat.

$$E \times C \text{ major quam } D^2.$$

Quodsi loco C, D et E, substituamus differentiales relationes, habemus: pro *maximo* aut *minimo* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ negativae aut positivae: et in utroque casu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y}\right)^2.$$

Si hae conditiones non dentur, nullum maximum aut minimum dabitur: neque etiam aderit maximum aut minimum si $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, aut separatim aut simul evanescant, sine eo, quod $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ evanescat; quoniam tunc postrema conditio non adest, si autem $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ sola evanescat, aderit maximum aut minimum, quoniam eo casu postrema conditio semper valet: nimirum

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0.$$

Sed valores p et q ipsarum x et y, quibus terminus primus $(Ai + Bh)$ serierum (α) et (β) evanuerit, ita consituti esse possunt, ut et secundus terminus $Ci^2 + 2Dhi + Eh^2$, evanescat, eo casu erit:

$$\text{ante } max. \text{ aut } min. \ \omega' = - [Fi^3 + 3Ghi^2 + 3Hih^2 + Ih^3],$$
$$\text{post } max. \text{ aut } min. \ \omega = + [Fi^3 + 3Ghi^2 + 3Hih^2 + Ih^3],$$

ex hoc tertio termino apparet, illius valorem tum pro maximo, cum pro minimo, praebere incrementa diversa, alterum negativum, alterum positivum; igitur, ne res absurda sit, oportet ut iisdem valoribus, quibus terminus primus evanuerit, et tertius evanescat: ergo opus est ut valor tertii termini sit zero, alioquin incrementa ante et post maximum aut minimum non fiunt aut ambo negativa aut positiva: igitur evidens est, restitutione differentialium relationum instituta, ut habeamus

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0; \ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0; \ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0; \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0;$$

si hae conditiones non conveniant, certi sumus, maximum aut minimum abesse: si contrarium obtineat, ex quarto termino praesentia et indicium maximi aut minimi, sic dijudicatur. Utroque casu, sive ante sive post maximum aut minimum erit,

$$\omega = \omega' = + [Ki^4 + 4Li^3h + 6Mi^2h^2 + 4Nih^3 + Oh^4],$$

hicce terminus, simili modo, ac de secundo termino egimus, reducitur ad hanc formam,

$$\omega = \omega' = K\left[i^2 + \frac{2Lih}{K}\right]^2 + \left[6M - \frac{(2L)^2}{K} - \frac{(2N)^2}{O}\right]i^2h^2 + O\left[h^2 + \frac{2Nih}{O}\right]^2.$$

Igitur cum factores $\left[i^2 + \frac{2Lih}{K}\right]^2$; i^2h^2; et $\left[h^2 + \frac{2Nih}{O}\right]^2$, semper sint positivi, manifestum est:

1°. Si

1°. Si maximum adsit, ideoque ω et ω' fiant negativa, sequentes quantitates negativas fieri debere,

$$K;\ \left[6M - \frac{(2L)^2}{K} - \frac{(2N)^2}{O}\right] \text{ et } O.$$

2°. Cum vero pro minimo, eaedem quantitates, positivos valores inducere debeant.

Sed K et O existentibus simul negativis aut positivis, erunt etiam $\frac{(2L)^2}{K}$ et $\frac{(2N)^2}{O}$ negativi aut positivi, ergo erit

$$-\left[\frac{(2L)^2}{K} + \frac{(2N)^2}{O}\right]$$

casu maximi, positivus, casu minimi, ille terminus erit negativus; qua propter, fiat $6M > \left[\frac{(2L)^2}{K} + \frac{(2N)^2}{O}\right]$, et M in maximo aut minimo negativa aut positiva necesse est: adsunt itaque hae conditiones:

1°. M, K et O simul negativae aut positivae;

2°. $6M > \left[\frac{(2L)^2}{K} + \frac{(2N^2)}{O}\right]$, id est

$$6KMO > 4OL^2 + 4KN^2;$$

sive restitutis loco K, M, N, O et L relationibus differentialibus:

1°. $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$; $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$; $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$ simul negativae aut positivae;

2°. $6\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} > 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}\right)^2 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x \cdot \partial y^3}\right)^2.$

Quodsi hae conditiones absint, nullum dubium relinquitur, quin etiam absit maximum aut minimum.

Sin accidat ut quartus terminus etiam evanescat, consulendus erit quintus terminus, qui, casu maximi aut minimi, etiam evanescat necesse est: tum autem ex sexto termino maximi aut minimi conditiones colligi debent, quod, cum eodem modo procedat ac de secundo et quarto termino instituimus, non opus censeo has conditiones ulterius perducere.

6. Quandoquidem functiones duarum variabilium plerumque referri possint ad superficies curvas, non alienum videtur, ea, quae generali modo demonstrata sunt, etiam ex superficierum natura probare; partim sequar Lagrange (3), partim alio modo, perspicuitatis gratia, hanc demonstrationem exhibebo.

Sit $z = \phi(x, y)$ aequatio curvae superficiei, quae, si differentietur erit hujusmodi:

$$\partial z = P\partial x + Q\partial y.$$

Si autem y constans sumatur in primitiva aequatione, habemus aequationem ipsius z et

(3) Vid. *Miscellanea Taur.* l. c.

z et x, quae igitur repraesentat curvam lineam, quam sequenti modo invenire possumus: sint OX, OY et OZ, *Fig.* 16. axes coördinatarum, ad quas superficiei puncta referuntur; sumatur y constantis magnitudinis a: sitque $OS = a$; ducatur ST parallela axi OX, ac transeat planum, perpendiculariter plano OXY insistens, per lineam ST; quod planum secabit superficiem curvam, secundum curvam VW, quae erit curva quaesita. Maxima aut minima ordinata z hujus curvae, invenitur, ponendo $\frac{\partial z}{\partial x} = P$ nihilo aequalis; qua ratione aequatio $P = o$ praebet talem valorem x, quo z fit maximum aut minimum; sed P est functio ipsarum x et y, et quamvis a constantem sumserimus, tamen illa quantitas, indeterminata est, omnesque valores inducre potest; eam ob causam non modo obtinemus maximam aut minimam ordinatam z curvae VW, sed quamplures maximas minimasve, quae tamen singulae tribuuntur diversis curvis V'W' V''W''; quae proveniunt si ad diversas distantias RQ', RQ'' caet. superficies secatur, planis, parallelis inter se, et perpendiculariter plano XOY insistentibus. In his omnibus autem, z non semper erit maxima aut minima: cum vero maximi aut minimi praesentia dejudicetur, ex secunda differentiali relatione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$, facile cognoscitur quibusnam valoribus diversis ipsius $y = a$, z evadat maxima aut minima. Quod si eo modo omnia puncta nota sint in quibus z fiat maxima aut minima, posita scilicet y indeterminata, iterum indagare possumus, quaenam harum omnium, sit maxima aut minima: et haec maxima aut minima sit functionis positae necessarium est. Omnia puncta memorata in genere constituunt lineam curvam; ergo si hujus curvae aequatio fuerit cognita, facile ejus maxima aut minima ordinata innotesceret.

Aequatio $\frac{\partial z}{\partial x} = P = o$, hujus curvae aequationem exhibet, si y ponatur indeterminata; sed etiam, si in data functione differentiali

$$\partial z = P\partial x + Q\partial y,$$

ponatur $P = o$, comprehenduntur et illa puncta in aequatione

$$\partial z = Q\partial y,$$

igitur si aequationes $\partial z = Q\partial y$ et $P = o$ conjungantur, prodibit aequatio curvae quaesitae: cum autem hujus curvae puncta referantur ad coördinatas z et y, invenitur ejus ordinata maxima, si faciamus $\frac{\partial z}{\partial y}$ id est Q, nihilo aequalis: *igitur* $P = o$ et $Q = o$ *si conjungantur prodibunt tales valores ipsarum x et y quibus z fiat maxima aut minima.*

Ut autem in postrema curva maximum distinguatur a minimo oportet ut sit

1°. pro maximo $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ negativa, id est $\frac{\partial Q}{\partial y}$ negativa,

2°. pro minimo $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ positiva, id est $\frac{\partial Q}{\partial y}$ positiva.

Est

Est autem, quoniam Q est functio ipsarum x et y,

$$\partial Q = p\partial x + q\partial y;\ \frac{\partial Q}{\partial y} = p \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + q,$$

porro, cum $\partial P = r\partial x + p\partial y$, et $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{r\partial x}{\partial y} + p$ (4),

erit $$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \times \frac{1}{r} - \frac{p}{r};$$

quodsi substituamus $\frac{\partial x}{\partial y}$ in functione $\frac{\partial Q}{\partial y}$, erit

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{p}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{p^2}{r} + q.$$

Sed quoniam, uti supposuimus, P est functio ipsarum x et y, in qua tamen y constantem valorem habet, erit $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$; igitur:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = q - \frac{p^2}{r}.$$

Est autem $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $p = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}$; $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, (5) ergo erit

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}.$$

Haec quantitas negativa sit oportet pro maximo, positiva autem pro minimo. Ergo, cum $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ sit negativa aut positiva, prodit, ut supra, haec tertia conditio,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2.$$

Sic igitur, etiam ex curvarum natura, haec generalis conditio maximi aut minimi probata est. Sed si acciderit ut $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ evanuerint, nullo modo ex curvarum natura maximi aut minimi conditiones detegi possent: sed sponte confugiendum esset ad Theorema Taylorianum.

§. 2.

(4) Quoniam in omni functione $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (Cl. de Gelder, *Diff. Reken.*, §. 112. pag. 292.) oportet coëfficiens p in $\partial Q = p\partial x + q\partial y$, idem sit, ac coëfficiens differentialis ∂y in $\partial P = r\partial x + p\partial y$.

(5) Vid. de Gelder, op. cit. pag. 301. V^a. 14 et 15.

§. 2.

De maximis et minimis functionis implicitae, $\phi(x, y, z) = o$.

7. Functio $\phi(x, y, z) = o$, quamquam tribus variabilibus constet, ad functiones duarum variabilium referri potest, quoniam, quamvis vel maxime implicitae sint hae quantitates, tamen ponere licet, z functionem esse posse ipsarum x et y. Quam ob rem et eaedem regulae, de maximis et minimis functionis $z = \phi(x, y)$ traditae, in functione $\phi(x, y, z) = o$ valent: nimirum ex functionis prima differentiali innotescunt relationes $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, quae pro maximo aut minimo praebent aequationes $\frac{\partial z}{\partial x} = o$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = o$; cum vero hae aequationes contineant tres quantitates variabiles x, y et z, requiritur tertia aequatio, ad determinandas illas quantitates. Ipsa autem data functio, erit talis aequatio, quoniam, ob vinculum quod adest inter aequationem primitivam, ejusque differentiales, x, y et z in his omnibus eaedem sunt: ergo habemus tres aequationes $\frac{\partial z}{\partial x} = o$, $\frac{\partial z}{\partial y} = o$ et $\phi(x, y, z) = o$, ex quibus tales valores ipsarum x, y et z hauriuntur, quibus posita functio maximum aut minimum valorem attingit: his autem inventis maximi aut minimi distinctio, ex secundis relationibus differentialibus, simili modo ac supra exposuimus, procedit. Ipsa autem functionis differentialis forma, sinit, ut aliquantum breviorem reddamus methodum.

Si enim habeamus $\phi(x, y, z) = o$, erit aequatio differentialis hujusmodi,

$$M\partial x + N\partial y + O\partial z = o,$$

$$\text{hinc } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{M}{O} = o, \text{ id est } M = o,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{N}{O} = o, \text{ id est } N = o;$$

secunda differentialis erit,

$$\partial M\partial x + M\partial^2 x + \partial N\partial y + N\partial^2 y + \partial O\partial z + O\partial^2 z = o,$$

id est, ob $M = o$ et $N = o$,

$$\partial M\partial x + \partial N\partial y + \partial O\partial z + O\partial^2 z = o;$$

dividatur haec aequatio per ∂x^2 eritque,

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial O}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + O\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = o,$$

et inde sequitur ob $\frac{\partial z}{\partial x} = o$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial M\partial x + \partial N\partial y}{O\partial x^2};$$

si-

simili modo invenitur,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{\partial M \partial x + \partial N \partial y}{O \partial y^2},$$

ergo si $- \frac{\partial M \partial x + \partial N \partial y}{O}$ habeat valorem positivum aut negativum, erunt et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ positivae aut negativae, et maximum aut minimum locum obtinebit si etiam haec conditio adsit:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y}\right)^2,$$

et sic etiam agendum erit, si, ad maximum aut minimum distinguendum, tertiae et superiores differentiales requirantur.

Exemplis jam illustremus, quae de maximis et minimis functionum duarum variabilium dicta sunt.

8. Exemplum I. *Detur cubus Fig.* 17. ABCHG, *insistens plano cuidam* PQ, *in ejus angulum solidum* A: *quod si ex reliquis angulis solidis, praeter angulum* D, *primo* A *oppositum, demittantur perpendicula* B*b*, C*c*, E*e*, F*f*, G*g*, H*h*, *in datum planum, atque conjungantur puncta, b, c, e, h, f, g, prodibit figura hexagonalis bchefg, quae utpote projectio cubi in planum* PQ *haberi potest: rogatur jam, cubum ita ponere respectu plani* PQ, *ut figura hexagonalis, seu ut cubi projectio, habeat maximam aream?*

Ducatur diagonalis major AD cubi; porro diagonalis minor AC; erit ob C*c* perpendicularem plano PQ, A*c* projectio diagonalis minoris AC. Si angulus CA*c*, diagonalem inter, atque ejus projectionem, idem maneat, cubi positio respectu plani PQ aliquantum determinata erit: sed cubus tamen innumeras alias positiones acquirere potest: namque poterit circa verticalem lineam AO, tanquam circa axim, ita volvere, ut diagonalis AC conficiat superficiem coni recti, cujus axis est linea AO: et tamen angulus CA*c* non immutabitur: vel in omnibus positionibus, hoc modo acquisitis, totus cubus, vertitur circa diagonalem minorem AC, quae igitur, cum immota maneat, eundem angulum CA*c* semper constituit cum ejus projectione AC. Quod si ducatur linea A*b* quae est projectio aretae AB cubi, et ponatur, angulum BA*b*, simili modo ac CA*c*, non immutari, cubi positio satis erit determinata. Etenim ob angulum BA*b* constantem, impeditur quominus cubus circa diagonalem minorem AC vertatur; et quamquam in hac positione, cubus circa verticalem AO volvi queat, ita ut anguli *c*AC et *b*AB ejusdem magnitudinis maneant, tamen ad nostrum scopum nil attinet, quandoquidem, in omni tali positione, hexagonus *bchefg*, eandem figuram, eandemque magnitudinem habet. Manifestum igitur est, si ponamus $\angle$ BA*b* $= \phi$ et $\angle$ CA*c* $= \chi$, ϕ et χ esse duas incognitas seu variabiles quantitates, a quibus quaestio pendet; cujus ope igitur area hexagoni determinanda est.

De-

Determinemus primum inclinationes planorum ABGF et AHEF in planum PQ.

Vocetur latus cubi $AB = BC = BG =$ caet. $= a$, erit

$Ab = AB \; Cos. \, BAb = a \; Cos. \, \phi$; $AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$;

$Ac = AC \; Cos. \, CAc = a\sqrt{2} \; Cos. \, \chi$.

$Bb = AB \; Sin. \, BAb = a \; Sin. \, \phi$; $Cc = AC \; Sin. \, CAc = a\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \chi$; ducatur Bl parallela lineae bc, erit $Bl = bc$, et $Cl = Cc - Cl = Cc - Bb = a\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \chi - a \; Sin. \, \phi$.

$Bl = \sqrt{(BC^2 - Cl^2)} = \sqrt{[a^2 - a^2 (\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \chi - Sin. \, \phi)^2]} = \sqrt{[a^2 - a^2 (2 \, Sin.^2 \chi - 2\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \chi \; Sin. \, \phi + Sin.^2 \phi)]} = \sqrt{[(a^2 - a^2 \, Sin.^2 \phi) - 2a^2 \, Sin. \, \chi \, (Sin. \, \chi - \sqrt{2} \, . \, Sin. \, \phi)]} = a\sqrt{[Cos.^2 \phi - 2 \; Sin. \, \chi \, (Sin. \, \chi - \sqrt{2} \, . \, Sin. \, \phi)]} = bc$.

Est autem

$16 \, . \, (Area)^2$ trianguli $Abc = [(Ac + Ab)^2 - bc^2] \, . \, [bc^2 - (Ac - Ab)^2]$ (6).

Habemus autem,

$$Ac + bA = a \, (Cos. \, \phi + \sqrt{2} \, . \, Cos. \, \chi); \; Ac - bA = a \, (Cos. \, \phi - \sqrt{2} \, . \, Cos. \, \chi);$$

$$(Ac + Ab)^2 = a^2 \, (Cos.^2 \phi + 2\sqrt{2} \, . \, Cos. \, \phi \; Cos. \, \chi + 2 \, Cos.^2 \chi);$$

$$(Ac - Ab)^2 = a^2 \, (Cos.^2 \phi - 2\sqrt{2} \, . \, Cos. \, \phi \; Cos. \, \chi + 2 \, Cos.^2 \chi);$$

$$bc^2 = a^2 \, (Cos.^2 \phi - 2 \, Sin.^2 \chi + 2\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \phi \; Sin. \, \chi),$$

$(Ac + Ab)^2 - bc^2 = a^2 \, [Cos.^2 \phi + 2\sqrt{2} \, . \, Cos. \, \phi \; Cos. \, \chi + 2 \, Cos.^2 \chi - Cos.^2 \phi + 2 \, Sin.^2 \chi - 2\sqrt{2} \; Sin. \, \phi \; Sin. \, \chi] = 2a^2 \, [1 + \sqrt{2} \, . \, Cos. \, (\chi + \phi)]$;

$bc^2 - (Ac - Ab)^2 = a^2 \, [Cos.^2 \phi - 2 \, Sin.^2 \chi + 2\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \phi \; Sin. \, \chi - Cos.^2 \phi + 2\sqrt{2} \; Cos. \, \phi \; Cos. \, \chi - 2 \, Cos.^2 \chi] = 2a^2 \, [\sqrt{2} \, . \, Cos. \, (\chi - \phi) - 1]$.

Ergo $16 \times (Area)^2 = 4a^4 \, [1 + \sqrt{2} \, . \, Cos. \, (\chi + \phi)] \, . \, [\sqrt{2} \, . \, Cos. \, (\chi - \phi) - 1]$

$$= 4a^4 \left\{ \sqrt{2} \, [Cos. \, (\chi - \phi) - Cos. \, (\chi + \phi)] + 2 \, Cos. \, (\chi - \phi) \, . \, Cos. \, (\chi + \phi) - 1 \right\},$$

sed $Cos. \, (\chi - \phi) - Cos. \, (\chi + \phi) = 2 \, Sin. \, \chi \; Sin. \, \phi$;

$2 \, Cos. \, (\chi - \phi) \, . \, Cos. \, (\chi + \phi) = 2 \, Cos. \, \tfrac{1}{2} (2\chi - 2\phi) \, Cos. \, \tfrac{1}{2} (2\chi + 2\phi) = Cos. \, 2\chi + Cos. \, 2\phi$. (7)

$Cos. \, 2\chi = 1 - 2 \, Sin.^2 \chi$; $Cos. \, 2\phi = 1 - 2 \, Sin.^2 \phi$; $Cos. \, 2\chi + Cos. \, 2\phi = 2 \, [1 - Sin.^2 \chi - Sin.^2 \phi]$, si haec subsituantur habemus:

$16 \, (Area)^2 = 4a^4 \, [2 - (2 \, Sin.^2 \chi - 2\sqrt{2} \; Sin. \, \phi \; Sin. \, \chi + 2 \, Sin.^2 \phi) - 1] = 4a^4 \, [1 - Sin.^2 \phi - (2 \, Sin.^2 \chi - 2\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \phi \; Sin. \, \chi + Sin.^2 \phi)] = 4a^4 \, [Cos.^2 \phi - (\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \chi - Sin. \, \phi)^2]$.

Ergo $Area = \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{[Cos.^2 \phi - (\sqrt{2} \, . \, Sin. \, \chi - Sin. \, \phi)^2]}$.

Producatur planum laterale ABCH, donec planum PQ secet, secundum lineam NL, et vocetur inclinatio planorum PQ et NLCB, κ, erit:

Area trianguli $Abc =$ triangulo $ABC \times Cos. \, \kappa$ (8);

sed area trianguli $ABC = \tfrac{1}{2} AB \, . \, BC = \tfrac{1}{2} a^2$.

er-

(6) Vid. Cl. de Gelder, *Begins. der Meetk.*, III Boek, XIII Stell. §. 232.

(7) Vid. de Gelder, op. modo citato, VIII Boek, VI Stelling.

(8) Vid. de Gelder, eod. op. XV Boek, II Hulp Stell. §. 1520.

ergo, facta substitutione,

$$\tfrac{1}{2}a^2 \sqrt{[Cos.^2\phi - (\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)^2]} = \tfrac{1}{2}a^2 \; Cos. \; x,$$

hinc $Cos. \; x = \sqrt{[Cos.^2\phi - (\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)^2]}$.

Producatur planum laterale ABGF, quod perpendiculare est plano producto NLCB, donec secet planum PQ lineâ AR, et collocetur in puncto A centrum globi, cujus radius aequalis est unitati. Hujus globi superficies secabitur planis RBA, RAN et BAN secundum arcus $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ et $\alpha\beta$: $\alpha\beta\gamma$ erit igitur triangulum sphaericum, quod rectangulare est in β, erit igitur ex proprietate trianguli rectangularis sphaerici:

$$Cos. \; \beta\gamma\alpha = Cos. \; \alpha\beta \; . \; Sin. \; \beta\alpha\gamma. \quad (9)$$

Jam vero arcus $\alpha\beta$ convenit cum angulo BAN, cujus *Cosinus* sic invenitur.

In triangulis rectangularibus similibus CN*c*, BN*b* est

$$CN : Cc = BN : Bb,$$
$$CN : BN = Cc : Bb.$$

$CN - BN : BN = Cc - Bb : Bb$ sive $BC : BN = Cl : Bb$, hinc $BN = \frac{BC \, . \, Bb}{Cl}$,

id est, si substituamus valores jam inventos,

$$BN = \frac{a \, . \, a \; Sin. \phi}{a(\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)} = a \, . \frac{Sin. \phi}{(\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)}.$$

$$Tang. \; BAN = \frac{BN}{BA} = \frac{Sin. \phi}{(\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)},$$

hinc invenitur, cognito modo,

$$Cos. \; BAN = Cos. \; \alpha\beta = \frac{\sqrt{2} \; Sin. \chi - Sin. \phi}{\sqrt{[(\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)^2 + Sin.^2 \phi]}}.$$

Porro angulus sphaericus $\beta\alpha\gamma$, idem valet atque angulus positionis planorum PQ et NLCB, ergo $\angle \beta\alpha\gamma = x$ et

$$Sin. \, x = \sqrt{(1 - Cos.^2 x)} = \sqrt{[Sin.^2\phi + (\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)^2]},$$

et quoniam angulus $\beta\gamma\alpha$ aequalis est angulo positionis planorum FGBA et PQ, erit, si inclinatio horum planorum vocetur λ,

$$Cos. \lambda = \left[\sqrt{[Sin.^2\phi + (\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)^2]}\right] \times \frac{\sqrt{2} \, . \, Sin. \chi - Sin. \phi}{\sqrt{[Sin.^2\phi + (\sqrt{2} . Sin. \chi - Sin. \phi)^2]}}.$$

Ergo. $\qquad Cos. \; \lambda = \sqrt{2} \, . \; Sin. \; \chi - Sin. \; \phi.$

Tandem si producatur planum laterale FHAE, quod secat planum PQ lineâ AI, ac collocetur in puncto A globi centrum, orietur, simili modo, triangulum sphaericum rectum $\delta\varepsilon\zeta$, eritque, ut supra,

$$Cos. \; \varepsilon\zeta\delta = Cos. \; \mu = Cos. \; \delta\varepsilon \, . \, Sin. \; \varepsilon\delta\zeta,$$

sed $\angle$ HAB $= 90°$, ergo $\angle$ LAH $=$ *arcui* $\delta\varepsilon =$ *complem.* $\angle$BAN,

$$Cos. \; \delta\varepsilon = Sin. \; \alpha\beta = \frac{Sin. \; \phi}{\sqrt{[Sin.^2\phi + (\sqrt{2} . Sin. \; \chi - Sin \; \phi)^2]}},$$

por-

(9) Vid. Cl. de Gelder, *Beg. Meetk.* XII Boek, IX Stell. §. 1063.

H

porro est $Sin.\ \iota\partial\zeta = Sin.\ \varkappa$, habemus igitur valorem *Cosinus* anguli positionis planorum PQ et FEHA:

$$Cos.\ \mu = \frac{Sin.\ \phi}{\sqrt{[Sin.^2\phi + (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]}} \times \sqrt{[Sin.^2\phi + (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]},$$

id est, $Cos.\ \mu = Sin.\ \phi$,

ut valores inclinationum $\varkappa$, λ et μ recte se habeant, patet exinde quod:

$$Cos.^2\varkappa + Cos.^2\lambda + Cos.^2\mu = Cos.^2\phi - (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2 + (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2 + Sin.^2\phi = Cos.^2\phi + Sin.^2\phi = 1.$$

Namque cognita est haec proprietas: *summa quadratorum Cosinuum angulorum, qui intercepti sunt, inter planum quoddam, et tria alia sibi perpendicularia, unitati aequalis est* (10).

Inventis igitur his angulis positionis, statim habemus aream quaesitam hexagoni *bchefg*. Etenim cum quadrilatera A*bch*, A*bgf*, A*hef*, sint projectiones quadratorum planorum lateralium ABCH, ABGF, AHEF, erit

area quadr. A*bch* = ABCH $\times$ $Cos.\ \varkappa$,

area quadr. A*bgf* = ABGF $\times$ $Cos.\ \lambda$,

area quadr. A*hef* = AHEF $\times$ $Cos.\ \mu$. (11)

Area hexagoni autem aequalis est summae horum quadrilaterorum, et cum plana ABCH, ABGF, AHEF sint quadrata aequalia, erit, si vocemus aream hexagoni y,

$$y = a^2\,(Cos.\ \varkappa + Cos.\ \lambda + Cos.\ \mu),$$

id est, $$y = a^2 . \left[\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi + \sqrt{[Cos.^2\phi - (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]}\right],$$

et haec est functio cujus maximum investigandum est, eam ab causam si differentietur erit,

$$\partial y = a^2\sqrt{2}\,.\,\partial\,.\,\chi\ Cos.\ \chi + a^2\,\partial\,.\,\sqrt{[Cos.^2\phi - (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]},$$

$$\partial\,.\,\sqrt{[Cos.^2\phi - (\sqrt{2}\ Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]} =$$

$$\frac{-\partial\phi\ Cos.\ \phi\ Sin.\ \phi - (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)\,.\,(\sqrt{2}\,.\,\partial\chi\ Cos.\ \chi - \partial\phi\ Cos.\ \phi)}{\sqrt{[Cos.^2\phi - (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]}};$$

$$\partial y = a^2\sqrt{2}\,.\,\partial\chi\ Cos.\ \chi -$$

$$\frac{a^2\partial\phi\ Cos.\ \phi\ Sin.\ \phi + a^2\,(\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)\,.\,(\sqrt{2}\,.\,\partial\chi\ Cos.\ \chi - \partial\phi\ Cos.\ \phi)}{\sqrt{[Cos.^2\phi - (\sqrt{2}\ Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]}},$$

$$\partial y = a^2\,\partial\chi\,.\,\sqrt{2}\,.\,Cos.\ \chi\ \sqrt{[Cos.^2\phi - (Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]} - a^2\partial\phi\ Cos.\ \phi\ Sin.\ \phi$$
$$- 2a^2\,\partial\chi\ Sin.\ \chi\ Cos.\ \chi + a^2\sqrt{2}\,\partial\phi\ Cos.\ \phi\ Sin.\ \chi + a^2\,\partial\chi\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \phi\ Cos.\ \chi - a^2\,\partial\phi\,.\,Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi,$$

hujus autem aequationis membrum alterum dividi oportet per

$\sqrt{[Cos.^2\phi - (\sqrt{2}\,.\,Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]}$.

Ex

(10) Vid. v. c. Cl. Hachette, *Traité des surfaces du second degré*, Chap. I. §. 1. N. 28. pag. 44.

(11) Vid. de Gelder, *Beginselen der Meetkunst*, XV Boek, III Hulpstelling.

Ex ea nunc facile invenitur:

$$\frac{\partial y}{\partial \phi}=a^2\frac{-2\,Cos.\,\phi\;Sin.\,\phi+\sqrt{2}\,.\,Cos.\,\phi\;Sin.\,\chi}{\sqrt{[Cos.^2\phi-(\sqrt{2}\,.\,Sin.\,\chi-Sin.\,\phi)^2]}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(\alpha)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \chi}=a^2\frac{\sqrt{2}.\,Cos.\chi\,\sqrt{[Cos.^2\phi-(\sqrt{2}\,.\,Sin.\chi-Sin.\phi)^2]}-2\,Sin.\chi\,Cos.\chi+\sqrt{2}.\,Sin.\phi\,Cos.\chi}{\sqrt{[Cos.^2\phi-(\sqrt{2}\,.\,Sin.\,\chi-Sin.\,\phi)^2]}}\,(\beta).$$

Habemus igitur pro maximo has aequationes,

$$\frac{\partial y}{\partial \phi}=o \text{ et } \frac{\partial y}{\partial \chi}=o,$$

id est, $\sqrt{2}\,.\,Cos.\,\phi\;Sin.\,\chi-2\,Cos.\,\phi\;Sin.\,\chi=o,$

et $\sqrt{2}\,.\,Cos.\,\chi\,\sqrt{[Cos.^2\phi-(\sqrt{2}\,.\,Sin.\,\chi-Sin.\,\phi)^2]}-2\,Sin.\,\chi\,Cos.\,\chi+\sqrt{2}\,.\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\chi=o,$ et hae aequationes inservire debent ad determinandos illos valores ϕ et χ quibus proposita functio, maximum fiat.

Si prima dividatur per $Cos.\,\phi$ erit,

$$\sqrt{2}\;Sin.\,\chi-2\;Sin.\,\phi=o,$$

hinc $\quad Sin.\,\chi=\sqrt{2}\;Sin.\,\phi,$

substituatur hicce valor in altera aequatione, quae postquam divisa sit per $Cos.\,\chi$, sic se habet:

$$\sqrt{2}\,.\,\sqrt{[Cos.^2\phi-(2\,Sin.\,\phi-Sin.\,\phi)^2]}-2\sqrt{2}\,.\,Sin.\,\phi+\sqrt{2}\,.\,Sin.\,\phi=o,$$

id est $\quad \sqrt{(Cos.^2\phi-Sin.^2\phi)}-Sin.\,\phi=o,$

$Cos.^2\phi-Sin.^2\phi=Sin.^2\phi$; $Cos.^2\phi=2\,Sin.^2\phi$; $Tang.^2\phi=\frac{1}{2}$; $Tang.\,\phi=\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

hinc $Sin.\,\phi=\frac{1}{3}\sqrt{3}=Sin.$ BAb et $Sin.\,\chi=\sqrt{2}\,.\,Sin.\,\phi=\frac{1}{3}\sqrt{6}=Sin.$ CAc;

sed $Cos.$ DA$c=\frac{AC}{AD}=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$, et $Cos.$ BAD $=\frac{AB}{AD}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Ergo erit $\angle$ CAc = *Complem.* DAC; et $\angle$ BAb = *Complem.* DAB,

qua propter $\angle\,c$AD $=\angle\,b$AD $=90^\circ$; et inde sequitur, *hexagonum bchefg habere aream maximam, si diagonalis major ipsius cubi perpendicularis sit plano dato* PQ.

Si autem AD perpendicularis sit PQ, perspicuum est, aretas AB, AF, AH, omnes simili modo, dispositas esse, respectu plani PQ, id est, angulos BAb, HAh, FAf aequales fore; sin autem hi anguli aequales sint, erunt lineae Ab, Ah et Af aequales inter se. Porro manifestum est in hac positione cubi, diagonales minores AC, AE et AG, ita dispositas esse, ratione plani PQ, ut earum projectiones Ac, Ae, Ag, etiam inter se aequales sint; sed

$$Ac=a\sqrt{2}\,.\,Cos.\,\chi=a\sqrt{2}\,.\,\tfrac{1}{3}\sqrt{3}=\tfrac{1}{3}a\sqrt{6},$$
$$Ab=a\,Cos.\,\phi=a\,.\,\tfrac{1}{3}\sqrt{6}=\tfrac{1}{3}a\sqrt{6}.$$

Ergo Ac = Ab, et eam ob causam, si AD perpendicularis sit plano PQ, erunt lineae Ab, Ac, Ah, caet., quae ex puncto A ducantur ad angulos b, c, h caet. hexagoni, inter se aequales. Habemus porro,

$$gG = \sqrt{(AG^2 - Ag^2)} = \sqrt{(2a^2 - \tfrac{2}{3}a^2)} = \tfrac{2}{3}a\sqrt{3},$$

$$gG - Bb = Go = \tfrac{2}{3}a\sqrt{3} - a\ Sin.\ \phi = \tfrac{2}{3}a\sqrt{3} - \tfrac{1}{3}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}.$$

Ergo $Bo = \sqrt{(GB^2 - Go^2)} = \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{3}a^2)} = \tfrac{1}{3}a\sqrt{6} = bg$;

et quoniam $Bl = bc = \tfrac{1}{3}a\sqrt{6}$, erit $bg = cb$, et $gb = Ag = Ab = Ac = bc$.

Simili modo patebit fg aequalem esse lineae gb et sic porro: ergo hexagonus maximus $gbchef$ constat sex triangulis aequilateralibus; ille igitur est regularis; hinc sequitur:

Hexagonum quaesitum tum esse maximum, si regularis sit.

Quamquam a priori satis convicti simus hexagonum fore maximum, si $Sin.\ \phi = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$ et $Sin.\ \chi = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$ sumatur, tamen videamus, num haec inventa, pareant conditionibus, quae in maximo adesse debent.

Hae conditiones sunt:

1°. ut sint $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2}$ negativae.

2°. ut habeamus $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \chi}\right)^2$.

Si valores $\frac{\partial y}{\partial \phi}$ et $\frac{\partial y}{\partial \chi}$ supra, form. (α) et (β), inventos, differentiemus, primum respectu $\partial \phi$, alterum respectu $\partial \chi$, eaque observemus quae in priori capite § 2. N°. 8, dicta sunt, habemus:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = a^2 \frac{2\ Sin.^2 \phi - 2\ Cos.^2 \phi - \sqrt{2}\ .\ Sin.\ \chi\ Sin.\ \phi}{\sqrt{[Cos.^2 \phi - (\sqrt{2}\ .\ Sin.\ \phi - Sin.\ \phi)^2]}},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2} = \frac{2\ Sin.^2 \chi - 2\ Cos.^2 \chi - \sqrt{2}\ .\ Sin.\ \chi\ Sin.\ \phi}{\sqrt{[Cos.^2 \phi - (\sqrt{2}\ .\ Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]}} - \sqrt{2}\ .\ Sin.\ \chi - \frac{\sqrt{2}\ .\ (\sqrt{2}\ .\ Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)\ Cos.\ \chi}{[Cos.^2 \phi - (\sqrt{2}\ .\ Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]}.$$

Porro si aequatio (α) differentietur respectu χ erit:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \chi} = \frac{\sqrt{2}\ .\ Cos.\ \phi\ Cos.\ \chi}{\sqrt{[Cos.^2 \phi - (\sqrt{2}\ .\ Sin.\ \chi - Sin.\ \phi)^2]}}.$$

Jam vero si in his substituantur valores inventi $Sin.\ \phi = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$; $Sin.\ \chi = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$ caet., habemus tandem,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = -\frac{\tfrac{4}{3}}{\tfrac{1}{3}\sqrt{3}} = -\tfrac{4}{3}\sqrt{3};\ \frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{2};\ \frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \chi} = \frac{\tfrac{1}{3}\sqrt{6} \times \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\tfrac{1}{3}\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3},$$

Ergo $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2}$ habent valores negativos et $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2}\right) = \tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{6}$, quod productum multo major est quam $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \chi}\right)^2 = \tfrac{4}{3}$.

9. Exemplum 2. *Inter omnia triangula, quorum perimetra aequalia sunt, illud invenire, quod habet maximam aream?*

Si ponamus *Fig.* 18, $AC = x$, $BC = y$, et perimeter $AB + AC + BC = p$, erit $AB = p - (x + y)$ et habemus cognitam proprietatem,

$$Area = z = \sqrt{\tfrac{1}{2}p\ (\tfrac{1}{2}p - x)\ (\tfrac{1}{2}p - y)\ (x + y - \tfrac{1}{2}p)}.$$

Est

Est autem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-y)\,(x+y-\tfrac{1}{2}p)+\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(\tfrac{1}{2}p-y)}{\sqrt{\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(\tfrac{1}{2}p-y)\,(x+y-\tfrac{1}{2}p)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(x+y-\tfrac{1}{2}p)+\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(\tfrac{1}{2}p-y)}{\sqrt{(\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(\tfrac{1}{2}p-y)\,(x+y-\tfrac{1}{2}p)}}.$$

Et cum pro maximo habeamus $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, erit

$$\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-y)\,(\tfrac{1}{2}p-x-x-y+\tfrac{1}{2}p)=0,\ \text{et}\ \tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(\tfrac{1}{2}p-y-y-x+\tfrac{1}{2}p)=0,$$

id est, $\tfrac{1}{2}p-2x-y+\tfrac{1}{2}p=0$; $\tfrac{1}{2}p-2y-x+\tfrac{1}{2}p=0$.

Ex prima aequatione deducimus $y=p-2x$, hinc altera fit:

$p-x-2\,(p-2x)=0$, ex qua $x=\tfrac{1}{3}p$. Ergo $y=p-\tfrac{2}{3}p=\tfrac{1}{3}p$.

Igitur erit $x=y=\tfrac{1}{3}p$, et eam ob causam erit etiam latus tertium trianguli $=\tfrac{1}{3}p$: *quapropter; Triangulum aequilaterum seu regulare, habebit maximam aream;* quod etiam ex geometriae elementis constat (12).

Habemus porro,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-y)-\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-y)}{\sqrt{\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(\tfrac{1}{2}p-y)\,(x+y-\tfrac{1}{2}p)}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)-\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)}{\sqrt{\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(\tfrac{1}{2}p-y)\,(x+y-\tfrac{1}{2}p)}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\tfrac{1}{2}p\,(x+y-\tfrac{1}{2}p)-\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-y)-\tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}p-x)}{\sqrt{\tfrac{1}{2}p\,(\tfrac{1}{2}p-x)\,(\tfrac{1}{2}p-y)\,(x+y-\tfrac{1}{2}p)}}.$$

Ergo si substituamus $x=y=\tfrac{1}{3}p$, habemus,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\sqrt{3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\sqrt{3}.$$

Qua propter, ut oportet, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ sunt negativae et $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=12$, major est quam $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=3$.

10. EXEMPLUM 3. *Aequatio superficiei cilindri recti Fig. 19. cujus axis* AB *posita est in plano coördinatarum* XOZ, *et transit per originem* O, *est*

$$a^2x^2+b^2y^2+z^2-2axz-b^2r^2=0,\quad (13)$$

(*a et b denotantibus quantitates constantes positivas, et r existente radium cylindri*) *rogatur invenire tales valores x et y quibus z fiat maximum aut minimum?*

Quandoquidem superficies cilindrica ad infinitum extendatur, sursum et deorsum, perspicuum est nullum maximum aut minimum adesse: idque ex Theoria exposita erit confirmandum.

Da-

(12) Vid. Cl. de Gelder, *Begins. der Meetk.*, VI Boek, XV Stell. §. 443.

(13) Vid. de Gelder, *Begins. Stelk.*, §. 234. pag. 325.

aequatio differentialis sic se habet:

$$2a^2x\partial x + 2by^2\partial y + 2z\partial z - 2ax\partial z - 2az\partial z = 0,$$
$$(2a^2x - 2az)\partial x + 2b^2y\partial y + (2z - 2ax)\partial z = 0,$$

hinc invenitur:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2a^2x - 2az}{2z - 2ax}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2b^2y}{3z - 2ax},$$

pro maximo aut minimo erit:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ id est, } 2a^2x - 2az = 0, \text{ et } \frac{\partial z}{\partial y} = 0; 2b^2y = 0,$$

hinc $x = \frac{z}{a}$, et $y = 0$.

Igitur data functio erit

$$z^2 + z^2 - 2z^2 - b^2r^2 = 0, \text{ id est, } b^2r^2 = 0.$$

Ergo valores ipsarum x et y ita sunt, ut ipsi z praebeant nullum valorem, quapropter nullum aderit *maximum* aut *minimum*.

§. 3.

OBSERVATIONES.

11. OBSERVATIO I. Haec pauca exempla, satis, ut opinor, theoriam expositam illustrant, ut non opus censeam plura hic adferre: namque regulae faciles sunt, et ab omnibus intelliguntur, eamque ob causam quaestionum difficultates non versantur in regularum applicatione; sed in resolutione aequationum differentialium $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Hae enim plerumque sunt admodum compositae, et quamvis in exemplis traditis ea resolutio facilis fuerit, tamen in functionibus duarum variabilium haud raro est, illas aequationes differentiales, esse quarti et superioris gradus; immo in his facile dantur casus, quibus resolutio exhiberi nequit. Idque praesertim occurrit in functionibus implicitis: namque tales functiones semper etiam referuntur ad superficies curvas, eaeque functiones tantummodo praebent facilem solutionem, quae pertinent ad superficies curvas secundi ordinis, quarum aequatio generalis hujusmodi est,

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'xz + 2b''yz + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0. \quad (14)$$

Sed quandoquidem tales superficies multitudine valde sint determinatae (15) manifestum est,

(14) Vid. Hachette, *traité des surfaces du second degré*, Chap. II. §. 1. pag. 142. art. 95.

(15) Superficies curvae secundi ordinis praecipue quinque sunt: scilicet *Ellipsoïs*, *Hyperboloïdes*, quas Galli vocant *Hyperboloïde a une nappe et a deux nappes*; *paraboloïs elliptica*, et *Hyperbolica*. Vid. eod. opere pag. 169 et 175.

est, eos casus, quibus functio implicita ad eos superficies pertinet, paucissimos esse (16).

12. Observatio II. Nonnunquam tamen tales functiones compositas evitamus, si loco duarum variabilium, plures admittamus quantitates variabiles, sed tum etiam tot dentur aequationes conditionis, quot variabiles insuper admisimus, necesse est. Attamen etiam in his casibus accidet, ut ad solutionem vix perveniamus (17). Hoc manifestum erit ex sequenti exemplo.

13. Exemplum 4. *Datis quinque lineis a, b, c, d et e, Fig. 20, construere pentagonum, qui omnium pentagonorum, iisdem lineis confectorum, habeat maximam aream?*

Simile exemplum nunc ponimus, ac posuimus, in antecedenti capite, loco, modo citato, et quidem eam ob causam, ut quam luculentissime appareat, quam insigniter augentur difficultates, si functiones duarum variabilium tractandae sint; cum vero functiones unius variabilis, iisdem fere circumstantiis generatae, nullam difficultatem praebeant.

Si anguli oppositi EAB, et DCB pentagoni fuerint determinatae magnitudinis, omnino esset pentagonus ABCDE determinatus: ergo si vocentur x et y, area invenienda est in functione ipsarum x et y, et hae porro ita determinentur oportet, ut area illa fiat maxima.

Quamquam ex Matheseos fonte aream in functione a, b, c, d, e, x et y invenire possimus, tamen ea ratio nobis non praebebit functionem, tractatu facilem, quare aliam viam ingrediamur, et praeter variabiles x et y etiam admittamus duas alias, nimirum $\angle$ BED $= z$ et BE $= v$; sed tum etiam quaeramus duas aequationes conditiones.

Est autem in triangulis BAE, BDE et BCD.

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \; Cos. \; BAE,$$

id est: $$v^2 = a^2 + e^2 - 2ae \; Cos. \; x \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2BE \cdot DE \; Cos. \; BED,$$

ergo: $$v^2 + d^2 - 2vd \; Cos. \; z = b^2 + c^2 - 2bc \; Cos. \; y \quad \ldots \quad (\beta)$$

Hae aequationes (α) et (β) sunt aequationes conditionis, quibus mox utemur. Habemus porro:

$$\text{Area trianguli } ABE = \tfrac{1}{2}ae \; Sin. \; x,$$
$$\ldots\ldots\ldots \; BED = \tfrac{1}{2}vd \; Sin. \; z,$$
$$\ldots\ldots\ldots \; BCD = \tfrac{1}{2}bc \; Sin. \; y.$$

Ergo erit Area pentagoni $= w$,

$$w = \tfrac{1}{2}ae \; Sin. \; x + \tfrac{1}{2}bc \; Sin. \; y + \tfrac{1}{2}vd \; Sin. \; z,$$

quae cum maxima esse oporteat, differentietur, eritque:

$$\partial w = \tfrac{1}{2}ae \; Cos. \; x \, \partial x + \tfrac{1}{2}bc \; Cos. \; y \, \partial y + \tfrac{1}{2}d \; Sin. \; z \, \partial v + \tfrac{1}{2}vd \; Cos. \; z \, \partial z,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \tfrac{1}{2}ae \; Cos. \; x \frac{\partial x}{\partial y} + \tfrac{1}{2}bc \; Cos. \; y + \tfrac{1}{2}vd \; Cos. \; z \frac{\partial z}{\partial y} + \tfrac{1}{2}d \; Sin. \; z \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ac-

(16) Cf. Cap. I. §. 3. Observ. VII. No. 29.

(17) Cf. Cap. I. §. 3. Observ. IV. No. 19 sqq.

Aequatio (α) si differentietur, habemus,

$$\partial v = \frac{ae\ Sin.\ x}{v} \cdot \partial x,\ \text{ergo}\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{ae\ Sin.\ x}{v} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}.$$

Ex Aequationis (β) differentiali

$$2bc\ Sin.\ y\ \partial y = 2v\partial v - 2d\ Cos.\ z\ \partial v + 2vd\ Sin.\ z\ \partial z$$

sequitur; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{bc\ Sin.\ y}{vd\ Sin.\ z} - \frac{v - d\ Cos.\ z}{vd \times Sin.\ z} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$,

id est, substituta $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{a\ .\ e\ Sin.\ x}{v} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{bc\ Sin.\ y}{vd\ Sin.\ z} - \frac{v - d\ Cos.\ z}{vd\ Sin.\ z} \times \frac{ae\ Sin.\ x}{v} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}.$$

Ergo si valores $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ substituamus in aequatione differentiali $\frac{\partial w}{\partial y}$, habemus:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \tfrac{1}{2}ae\ Cos.\ x\ \frac{\partial x}{\partial y} + \tfrac{1}{2}bc\ Cos.\ y + \tfrac{1}{2}\,\frac{bc\ Sin.\ y\ Cos.\ z}{Sin.\ z}$$

$$- \tfrac{1}{2} \cdot \frac{v - d\ Cos.\ z}{v\ Sin.\ z} \cdot ae\ Cos.\ z\ Sin.\ x \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \tfrac{1}{2}\,\frac{ade\ Sin.\ z\ Sin.\ x}{v} \cdot \frac{\partial x}{\partial y},$$

ac denique, si omnia multiplicentur per ∂y et rite colligantur,

$$\partial w = \tfrac{1}{2}ae \left(Cos.\ x + \frac{d - v\ Cos.\ z}{v\ Sin.\ z} \cdot Sin.\ x\right) \partial x$$

$$+ \tfrac{1}{2}bc \left(Cos.\ x + \frac{Sin.\ y\ Cos.\ z}{v\ Sin.\ z}\right) \partial y.$$

Ergo pro maximo habemus has aequationes;

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \tfrac{1}{2}ae \left(Cos.\ x + \frac{d - v\ Cos.\ z}{v\ Sin.\ z} \cdot Sin.\ x\right) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \tfrac{1}{2}bc \left(Cos.\ y + \frac{Sin.\ y\ Cos.\ z}{Sin.\ z}\right) = 0,$$

ex altera habemus:

$$Sin.\ z\ Cos\ y + Sin.\ y\ Cos.\ z = 0,\ \text{id est},\ Sin.\ (z + y) = 0.$$

Ergo $z + y = 0$, sive $180°$ sive $360°$;

horum valorum autem $z + y = 180$ valere tantum potest; quo circa $z = 180° - y$,

ergo $Sin.\ z = Sin.\ y;\ Cos.\ z = - Cos.\ y.$

Sic prima aequatio fit:

$$Cos.\ x + \frac{d + v\ Cos.\ y}{Sin.\ y} \cdot \frac{Sin.\ x}{v} = 0,$$

hinc $v\ Sin.\ (x + y) + d\ Sin.\ x = 0 \ldots\ldots (\gamma).$

Aequatio (β) etiam reducitur ad

$$b^2 + c^2 - 2bc\ Cos.\ y = d^2 + v^2 + 2vd\ Cos.\ y.$$

Ergo $(2vd + 2bc)\ Cos.\ y = (b^2 + c^2 - d^2 - v^2) \ldots (\delta)$

Ex

Ex aequatione (γ) sequitur,

$$v = \frac{d\ Sin.\ x}{Sin.\ (x+y)};\ v^2 = \frac{d^2\ Sin.^2\ x}{Sin.^2\ (x+y)} = a^2 + e^2 - 2ae\ Cos.\ x \ldots (\epsilon)$$

haec substituantur in aequatione (δ):

$$\left(2bc - \frac{2d^2\ Sin.\ x}{Sin.^2\ (x+y)}\right) Cos.\ y = b^2 + c^2 - d^2 - \frac{d^2\ Sin.^2\ x}{Sin.^2\ (x+y)} \ldots (\zeta)$$

quodsi aequationes (ϵ) et (ζ) rite devolvantur, habemus:

$d^2\ Sin.^2 x = (a^2+e^2)\ Sin.^2 x\ Cos.^2 y + 2\,(a^2+e^2)\ Sin.\ x\ Sin.\ y\ Cos.\ x\ Cos.\ y + (a^2+e^2)$ $Sin.^2 y\ Cos.^2 x - 2ae\ Sin.^2 x\ Cos.\ x\ Cos.^2 y - 4ae\ Sin.\ x\ Cos.^2 x\ Sin.\ y\ Cos.\ y + 2ae\ Sin.^2 y$ $Cos.^2 x$ . . . . (1)

$2bc\ Sin.^2 x\ Cos.^2 y + 2bc\ Sin.\ x\ Cos.\ x\ Sin.\ y\ Cos.^2 y + bc\ Sin.^2 y\ Cos.\ y\ Cos.^2 x - 2d^2\ Sin.\ x$ $Sin.\ y\ .\ Cos.\ x\ Cos.\ y = (b^2+c^2+d^2).\ Sin.^2 x\ Cos.^2 y + 2\,(b^2+c^2-d^2)\ Sin.\ x\ Sin.\ y\ Cos.\ x$ $Cos.\ y + (b^2+c^2-d^2)\ .\ Sin.^2 y\ Cos.^2 x$ . . . . (2)

hae aequationes, inservire debent ad determinandos justos valores ipsarum x et y; quandoquidem autem, (si loco $Sin.\ x$ substituamus $\sqrt{(1 - Cos.^2 x)}$, atque ex aequationibus provenientibus, quantitates radicales seu irrationales reducamus,) aequationes finales sint *noni ordinis*, eas resolvere non possumus generali modo: etenim ex *Algebrae* principiis constat, aequationes superioris gradus si excedant quartum gradum, generali modo, non posse resolvi (18).

Tentemus igitur alio modo problema solvere. Aequatio (ζ) praebet

$2bc\ Sin.^2 (x+y)\ .\ Cos.\ y - 2d^2\ Sin.\ (x+y)\ .\ Cos.\ y\ .\ Sin.\ x = (b^2+c^2)\ Sin.^2$ $(x+y) - d^2\ Sin.^2\ (x+y) - d^2\ Sin.^2 x,$

sive $(b^2+c^2-2bc\ Cos.\ y)\ Sin.^2\ (x+y) - d^2\ Sin.\ (x+y) \times [Sin.\ (x+y)$ $- 2\,Sin.\ x\ Cos.\ y] = d^2\ Sin.^2 x;$

id est, $(b^2+c^2-2bc)(Cos.\ y)\ Sin.^2 (x+y) + d^2\ Sin.\ (x+y)\ .\ Sin.\ (x-y) = d^2\ Sin.^2 x.$

$(b^2+c^2-2bc\ Cos.\ y)\ Sin.^2 (x+y) + d^2\ Sin.^2 x - d^2\ Sin.^2 y = d^2\ Sin.^2 x.$

$$(b^2+c^2-2bc\ Cos.\ y)\ Sin.^2\ (x+y) = d^2\ Sin.^2 y,$$

aequatio (ϵ) praebet:

$$(a^2+e^2-2ae\ Cos.\ x)\ Sin.^2\ (x+y) = d^2\ Sin.^2 x.$$

Hae aequationes si devolvantur, aeque implicitae erunt, atque aequationes modo inventae, quod per se patet; sed tamen ex his aequationibus, pervenimus ad generalem enunciationem, quae tribuitur maximo pentagono; eaque est: *omnium pentagonorum iisdem lineis confectorum, ille gaudet area maxima, qui circulo inscribi potest.*

Namque si ex prima in altera substituatur valor ipsius $Sin.^2\ (x+y)$ erit:

$$\frac{a^2+e^2-2ae\ Cos.\ x}{d^2\ Sin.^2 x} = \frac{b^2+c^2-2bc\ Cos.\ y}{d^2\ Sin.^2 y}$$

sive

(18) Vid. de Gelder, *Beginselen der Stelkunst*, II Afd. X Hoofdst. §. 704. bl. 374.

sive $$\frac{a^2 + e^2 - 2ae\ Cos.\ x}{Sin.^2 x} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\ Cos.\ y}{Sin.^2 y} \quad \ldots \quad (\kappa)$$

si autem EABCD est circulus, circum pentagonum circumscriptus, atque ducantur radii MA, MB caetera, erit, ob $AM = EM = BM$, $\angle MAE = \angle MEA$; $\angle MAB = \angle MBA$, ergo $\angle EMB = 360° - \angle MEA - \angle EAB - \angle ABM = 360° - (\angle MAE + \angle MAB) - \angle EAB = 360° - \angle EAB - \angle EAB = 360° - 2\angle EAB = 360° - 2x.$

Ergo si MK perpendicularis sit lineae BE, erit $\angle EMK = \frac{1}{2}\angle EMB = 180° - x$

$$ME = \frac{EK}{Sin.\ EMK} = \frac{\frac{1}{2}BE}{Sin.\ x} = \frac{BE}{2\ Sin.\ x}\ .\ ME^2 = \frac{BE^2}{4\ Sin.^2 x} = \frac{a^2 + e^2 - 2ae\ Cos.\ x}{4\ Sin.^2 x}.$$

Simili-modo erit MB^2 aut MC^2: *v. c.*

$$MC^2 = \frac{BD^2}{4\ Sin.^2 y} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\ Cos.\ y}{4\ Sin.^2 y},$$

sed, quoniam radii circuli omnes sunt aequales, erit $MC^2 = ME^2$, ergo,

$$\frac{a^2 + e^2 - 2ae\ Cos.\ x}{4\ Sin.^2 x} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\ Cos.\ y}{4\ Sin.^2 y},$$

id est, $$\frac{a^2 + e^2 - 2ae\ Cos.\ x}{Sin.^2 x} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\ Cos.\ y}{Sin.^2 y};$$

quae aequatio cum eadem sit atque aequatio (K), quae deducta est, ex aequationibus $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, et $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$; patet: *illum pentagonum fore maximum, quod ad aream, qui circulo inscribi potest.*

Ad hanc propositionem, qua quaestio partim soluta est, pervenerimus, non modo ope Theoriae de maximis et minimis, sed etiam ope figurae proprietatum: certi sumus adfore maximum, sed ob aequationes (1) et (2), quae resolvi nequeunt, neque etiam dijudicare possumus ope secundae differentialis, utrum maximum adsit nec ne: et eandem ob causam ipsa quaestio prorsus resolvi nequit. Namque quamvis pentagonus maximus ille sit, qui circulo inscribatur, tamen, ex datis ejus lateribus a, b, c, d et e, illius circuli radius inveniri nequit: etenim radius invenitur formulâ,

$$Rad. = \frac{a^2 + e^2 - 2ae\ Cos.\ x}{4\ Sin.^2 x},$$

in qua autem x incognita est, quae ob rationes indicatas, generali modo cognosci non potest.

14. Observatio III. In functionibus duarum variabilium dantur etiam casus, quibus primae reliquaeque relationes differentiales infinitos magnos valores adipisci possunt. Sin autem cum valore quodam ipsarum x et y, $\frac{\partial z}{\partial x}$ v. c. fiat infinite magna, oportet etiam ut $\frac{\partial z}{\partial y}$ similem valorem acquirat. Namque, uti ex theoria planorum tangentium

con-

constat (19), si data functio referatur ad superficiem curvam, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, denotant tangentes angulorum inter axes x et y, et lineas, tangentes superficiem in puncto quodam; et hae lineae determinant positionem plani, quod tangit superficiem in hoc puncto; ergo si $\frac{\partial z}{\partial x}$ v. c. fit $= \infty$, indicium erit, unam lineam tangentem perpendicularem esse plano xy, ergo, cum planum tangens per hanc lineam transire oporteat, illud planum etiam perpendiculare erit huic coördinatarum plano: sed si hoc locum habeat, planum tangens etiam perpendiculare erit coördinatarum plano x, z: ergo altera linea tangens, quae etiam in eodem tangenti plano posita est, itidem perpendicularis erit plano illo coördinatarum; sed hoc fieri nequit, nisi habeamus $\frac{\partial z}{\partial y} = \infty$. Caeterum si fiant $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \infty$, aut si fiant $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = \infty$, eamque ob causam etiam $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \infty$, regulae de maximis et minimis traditae non valent, sed ut detegatur maximum aut minimum eandem regulam, quam in Cap. I. Observ. II. N°. 13. dedimus, sequamur necesse est. Similes observationes, quae eo loco inveniuntur, et hic valent: cum potius hicce casus pertineat ad theoriam *punctorum reflectionis solidorum* (*belg. Ligchamelyke keerpunten*,) quam ad theoriam de maximis et minimis; uti sequenti exemplo illustrabitur.

15. Exemplum 5. *Fig.* 21. *sint* OX, OY, OZ, *tres axes orthogonales: in origine* O *collocetur centrum baseos coni recti, cujus axis* OA *igitur coincidit cum axe coördinatarum* OZ: *si ponatur radius* OB $= a$, *altitudo* OA $= b$, OR $= x$, QR $= y$, PQ $= z$ *erit aequatio superficiei hujus coni*,

$$z = b - \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad (20),$$

rogatur invenire maximum ordinatum z hujus superficiei?

Ex figura manifestum est, OA esse maximam illam ordinatam, quae habetur si ponatur $x = y = 0$: theoriâ ergo idem confirmandum est.

Est autem differentialis datae aequationis,

$$\partial z = \frac{b}{a} \cdot \frac{x \partial x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{b}{a} \cdot \frac{y \partial y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Ergò $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{a} \cdot \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0,$$

his aequationibus satisfacere non possumus, nisi ponamus $x = 0$ et $y = 0$: ergo si adsit maximum aut minimum, $x = 0$ et $y = 0$, sunt valores quibus z fit max. aut min. habemus porro: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

(19) Vid. de Gelder, *Different. Reken.*, §. 148. pag. 445 et seqq.

(20) Vid. de Gelder, *Stelk.*, §. 233. pag. 324.

I 2

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Ergo si ponamus $x = 0$ et $y = 0$, erit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \infty,$$

itidemque reliquae relationes differentiales infinite magnae fiunt: quapropter, ut distinguamus maximum a minimo ponendum est in data functione, loco $x = y = 0$, $x = +i$ et $-i$; $y = +h$ et $-h$; qua ratione habemus:

$$z = b - \frac{b}{a}\sqrt{(h^2+i^2)}, \quad z = b - \frac{b}{a}\sqrt{(h^2+i^2)},$$

pro $x = y = 0$, fit $z = b$; quod si ponamus x et y, aliquantum minores et majores erit uterque valor ipsius z minor, quam valor b; ergo erit $z = b$ maxima ordinata.

Sed si quaestionem propius intueamur, A erit potius punctum reflectionis solidum, quam punctum maximae aut minimae ordinatae; quoniam in puncto A ordinata z crescere desinit, et statim, eodem regulari modo, diminuitur, ac primum crescebat: et quamvis data aequatio ad totam coni superficiem pertineat, tamen, nulla ratione habita valorum positivorum aut negativorum x et y, revera non plus praebet, quam partem ADBE, cui pars altera DGEA perfecte similis est. Si autem hoc verum sit, OA non est maxima ordinata, sed OA est terminus, trans quem ordinata z crescere desinit.

16. Haec de maximis et minimis functionum duarum variabilium. Quamquam enim ea, quae in Observationibus I, III, V, Cap. I, dicta sunt, et in hoc capite observari possunt, tamen prorsus opus esse non arbitror, ea repetere et separatim illustrare, quippe aut sint tam simplicia ut nulla egeant illustratione, aut ejusmodi, loco citato, memorata, ut non modo de functione unius variabilis valeant; sed in genere ad functiones quamplurium quantitatum variabilium pertinere possint.

CAPUT TERTIUM.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM, TRIUM PLURIUMQUE VARIABILIUM.

1. Quamquam investigatio maximorum et minimorum functionum, trium, pluriumque variabilium, frequens adeo non est in scientiis Mathematicis, tamen ipsum argumentum postulat, ut et pauca de his functionibus adjiciamus, quo melius appareat, theoriam,

riam, supra de functionibus unius duarumque variabilium expositam, generalem esse in quavis functione, eandemque viam semper esse ingrediendam.

2. Ratio, quam in antecedentibus capitibus secuti sumus, postularet, ut nunc etiam inquireremus in maxima et minima, functionis simplicis $v = \phi\,(x, y, z,)$ et functionis implicitae $\phi\,(v, x, y, z) = 0$. Sufficere autem opinor, si de maximis et minimis functionis simplicis $v = \phi\,(x, y, z)$ dicam; namque, ex iis, quae supra de maximis et minimis implicitarum functionum dicta sunt, quam luculentissime apparet, eorum investigationem iisdem parere praeceptis, quibus maximorum minimorumque inquisitio simplicium functionum, subjecta est: cum tamen omnis difficultas versetur in resolutione aequationum differentialium et primitivarum, quae cum illis conjunctae sunt, eaque resolutio non pendeat a Theoria de *maximis* et *minimis*.

3. Sit igitur $v = \phi\,(x, y, z)$ functio trium variabilium, et, ut maximi aut minimi conditiones statuamus, comparemus incrementa, ipsius functionis, seu ipsius v, cum maxima facta est, aut minima, si quantitates x', y', z', (quae denotant valores ipsarum x, y et z in maximo aut minimo) increscunt sive diminuuntur, quantitatibus quibusdam h, i, k: eodem enim fundamento nititur theoria de maximis et minimis functionis trium pluriumque variabilium, quo superstructa est methodus, qua maxima et minima functionis unius duarumque variabilium inveniuntur; crescant igitur primum quantitates x', y', z', quantitatibus admodum parvis h, i et k, deinde iisdem quantitatibus decrescant, et habentur incrementa seu decrementa u ipsius functionis, his seriebus Taylorianis:

$$u = \left[\frac{\partial v}{\partial x}.h + \frac{\partial v}{\partial y}.i + \frac{\partial v}{\partial z}.k\right] + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.h^2 + 2.\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.hi + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.i^2 + 2.\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}.hk\right.$$

$$\left. + 2.\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}.ik + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.k^2\right] + \tfrac{1}{3}\left[\text{caetera.}\right.$$

$$u' = -\left[\frac{\partial v}{\partial x}.h + \frac{\partial v}{\partial y}.i + \frac{\partial v}{\partial z}.k\right] + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.h^2 + 2.\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.hi + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.i^2\right.$$

$$\left. + 2.\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}.hk + 2.\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}.ik + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.k^2\right] - \tfrac{1}{3}\left[\text{caetera}\right. \quad (1),$$

id est, brevitatis gratia:

$$u = [Ah + Bi + Ck] + \tfrac{1}{2}[Dh^2 + 2Ehi + Fi^2 + 2Ghk + 2Hik + Ik^2] + \tfrac{1}{3}[\text{caetera.}$$
$$u' = -[Ah + Bi + Ck] + \tfrac{1}{2}[Dh^2 + 2Ehi + Fi^2 + 2Ghk + 2Hik + Ik^2] + \tfrac{1}{3}[\text{caetera.}$$

Si maximum adsit, utrumque u et u' decrementum esse debet; si minimum locum habet u et

(1) Ex iis, quae a Cl. de Gelder, *Diff. Reken.*, § 74. bladz. 177. dicta sunt, facile colligitur seriem Taylorianam, casu trium variabilium, illam formam induere: caeterum vid. Ill. Lagrange, in Miscell. Taurin. l. c. § 6.

ω et ω' incrementa denotent necesse est; ergo primo casu hoc significatur, si ω et ω' utrumque sit negativum, altero autem casu positivum.

Quandoquidem autem h, i et k vel minimas supposuimus, eam ob causam termini secundi serierum, erunt multo minores, quam termini primi, quapropter valores positivi aut negativi incrementorum ω et ω' sine errore dijudicantur ex valoribus positivis aut negativis terminorum primorum: habemus igitur

$$\omega = + [Ah + Bi + Ck] = + \left[\frac{\partial v}{\partial x} . h + \frac{\partial v}{\partial y} . i + \frac{\partial v}{\partial z} . k\right],$$

$$\omega' = - [Ah + Bi + Ck] = - \left[\frac{\partial v}{\partial x} . h + \frac{\partial v}{\partial y} . i + \frac{\partial v}{\partial z} . k\right].$$

In his autem, uti ex ipso Theoremate Tayloriano perspicuum est, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial z}$, denotant relationes differentiales, quae locum habent, cum variabiles x, y, z sunt x', y', z', id est ubi obtinet maximum aut minimum.

Hae relationes igitur ejusmodi esse videntur, ut post maximum aut minimum praebeant incrementum positivum, ante illud autem, incrementum negativum; cum vero id absurdum sit, tales valores ipsis relationibus, seu potius talem valorem ipso termino primo adsignemus necesse est, quo incrementa ω et ω' pro maximo et minimo, negativa et positiva fieri possint: hoc autem nullo alio modo attingitur, nisi ipse terminus evanescat: ergo pro maximo aut minimo erit;

$$\frac{\partial v}{\partial x} . i + \frac{\partial v}{\partial y} . h + \frac{\partial v}{\partial z} . k = 0; \text{ id est, } \frac{\partial v}{\partial x} . i = 0; \frac{\partial v}{\partial y} . h = 0; \frac{\partial v}{\partial z} . k = 0;$$

et, quoniam h, i et k, quamquam exiguae, tamen nullum valorem habere non possint, habemus in maximo aut minimo has tres aequationes:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Et quoniam, generali modo, hae sunt functiones trium variabilium x, y et z, optime inservient ad determinandos valores earum variabilium, quae reddant propositam functionem maximam aut minimam.

Si autem termini primi serierum positarum evanescant, habemus,

$$\omega = \omega' = + [Dh^2 + 2Ehi + Fi^2 + 2Ghk + 2Hik + Ik^2];$$

haec incrementa habent eundem valorem, qui autem pro maximo negativus, pro minimo positivus esse debet. Sed cum dijudicandum hoc sit absque incrementis h, i et k, sed tantum, ex particularibus valoribus relationum differentialium D, E, F, G, caet., quae in maximo et minimo locum habent, conemur terminum secundum in alium transformare, ex quo talia indicia sponte oculos incurrant.

Idque sequenti modo instituitur:

Dh^2

$$Dh^2 + 2Ehi + Fi^2 + 2Ghk + 2Hik + Ik^2 = \left[Dh^2 + 2Eih + 2Ghk + \frac{2EG}{D}.ki + \frac{E^2}{D}.i^2 + \frac{G^2}{D}.k^2\right] + \left[Fi^2 - \frac{E^2}{D}.i^2\right] + \left[Ik^2 - \frac{G^2}{D}.k^2\right] + \left[2Hik - \frac{2EG}{D}.ki\right]$$

$$= D\left[h + \frac{E}{D}.i + \frac{G}{D}.k\right]^2 + \left[F - \frac{E^2}{D}\right].i^2 + 2\left[H - \frac{EG}{D}\right].ki + \left[I - \frac{G^2}{D}\right].k^2;$$

fac autem $F - \frac{E^2}{D} = a$, $H - \frac{EG}{D} = b$; $I - \frac{G^2}{D} = k$ et habemus,

$$\text{Caet.} = D\left[h + \frac{E}{D}.i + \frac{G}{D}.k\right]^2 + ai^2 + 2bki + ck^2,$$

sed, uti in Capite II vidimus, $ai^2 + 2bki + ck^2 = a.\left(h + \frac{bk}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right).k^2$,

ergo erit terminus secundus,

$$D\left(h + \frac{E}{D}.i + \frac{G}{D}.k\right)^2 + a.\left(i + \frac{bk}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right).k^2,$$

qui terminus negativus aut positivus fit si habeamus:

$$D,\quad a \text{ et } c - \frac{b^2}{a},$$

negativas aut positivas: sed ex $\left(c - \frac{b^2}{a}\right)$ negativo aut positivo, sequitur c negativam aut positivam esse oportere et simul,

$$a.c \text{ majorem fore quam } b^2.$$

Ergo si substituamus, loco a, b et c, eorum valores, habemus pro maximo aut minimo has conditiones: nimirum ut sint termini D; $F - \frac{E^2}{D}$; et $I - \frac{G^2}{D}$, negativi aut positivi et $\left(F - \frac{E^2}{D}\right).\left(I - \frac{G^2}{D}\right) > \left(H - \frac{EG}{D}\right)^2$. Ex $F - \frac{E^2}{D}$ et $I - \frac{G^2}{D}$, sequitur autem F et I esse negativas aut positivas et $FD > E^2$; $ID > G^2$.

Igitur si substituamus loco D, E, caet. relationes differentiales, habetur haec regula, qua maximum et minimum indicatur et distinguatur, ex valoribus negativis aut positivis relationum differentialium, quae intrant in terminum secundum serierum positarum (2).

Pro maximo requiritur, ut fiant $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ negativae, pro minimo, eaedem relationes positivae fieri debent: sed, tum pro maximo, tum pro minimo sequentes conditiones adsint necesse est.

$$1^\circ.\ \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x.\partial y}\right)^2. \qquad 2^\circ.\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x.\partial z}\right)^2.$$

3.

(2) Hae regulae etiam expositae sunt a Lagrange in Miscellaneis Taurin. loco citato, § 6

$$3.\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right) . \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial z}\right)^2}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right) > \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z . \partial y} - \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial y} . \frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial z}}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right)^2.$$

Quodsi his conditionibus satisfieri nequeat, aberit maximum aut minimum, neque etiam aderit maximum aut minimum si $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, aut $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, aut $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, separatim aut simul evanescant, dum $\frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial z}$ caet. non evanescant; tum enim nullo modo conditiones propositae obtinent locum; sed aderunt tum, si, $\frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial z}$ caet. evanescentibus, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, habeant determinatos valores: quodsi omnes relationes evanescant, evanescit terminus secundus seriei positae: tum autem valor positivus aut negativus ipsorum incrementorum ω et ω' pendet a valore positivo aut negativo tertii termini: et cum ille valor unum incrementum reddat positivum, alterum negativum, oportet, ne in absurda incidamus, ut totus terminus tertius, aeque ac primus terminus, evanescat: quod si locum non habeat, certi sumus maximum aut minimum non adesse. Si autem contrarium obtineat, terminus quartus, si eodem modo transformetur ac secundus, indicium praebebit et discrimen maximi et minimi: et sic porro.

4. Ex his igitur cernere licet, eandem Methodum qua maxima et minima functionum unius et duarum variabilium determinantur, easdem regulas etiam praebere, quod ad functiones trium variabilium; atque ex hac convenientia haud incerto concludere possumus, eam etiam valere in functionibus quamplurium variabilium. Ne autem inutiliter longior fiat commentatio, in tales non inquiram: itidemque omittam observationes in antecedentibus capitibus factas, utpote quae sunt generales, eaeque ad functiones plurium variabilium facile applicantur: sed finem imponam huic capiti, et huic primae commentationis parti, sequenti exemplo.

5. *Datis duobus globis* A *et* E *Fig.* 22. *perfecte elasticis, invenire massas trium aliorum globorum elasticorum, ita ut, si globus primus* A *percutiat secundum* B, *data velocitate v, secundus autem percutiat tertium* C, *velocitate, ex prima percussione acquisita, et sic porro, ita ut, globo postremo, hac perpetua collisione, communicetur velocitas maxima?* (3)

Vocentur massae globorum datorum A et E, M et m, et massae globorum intermediorum x, y, z.

Si

(3) Hoc problema antiquitus cognitum erat, fuitque Hugenius, qui primam solutionem dedit. Lagrange illud eleganti pulchroque modo solvit in *Miscell. Taur.* pag. 31. art. 15. Eumque sequamur liceat.

Si globus elasticus cujus massa est M, percutiat alium globum x, velocitate v, dum hic, celeritate t, in eadem directione movetur atque ille, erit alterius globi celeritas c post collisionem (4),

$$c = \frac{2Mv + (x - M)\,t}{M + x}.$$

Si igitur corpus cujus massa est x quiescat, ideoque nullam habeat velocitatem, acquiret hoc corpus, post collisionem velocitatem

$$c = \frac{2\,Mv}{M + x},$$

haec igitur est velocitas, qua globus B percutit globum C: hic igitur habebit, post collisionem, velocitatem c',

$$c' = \frac{2\,xc}{x + y},$$

id est, si substituamus valorem ipsius c,

$$c' = \frac{4\,Mvx}{(M + x)\,(x + y)}.$$

Sic etiam velocitas quarti corporis erit,

$$c'' = \frac{2\,yc'}{y + x}, \text{ sive } c'' = \frac{8\,Mvxy}{(M + x)\,(x + y)\,(y + z)},$$

ac denique valocitas postremi corporis erit,

$$V = \frac{2\,zc''}{z + m} = \frac{16\,Mv\,.\,x\,.\,y\,.\,z}{(M + x)\,(x + y)\,(z + m)},$$

atque in hac functione x, y et z ita sunt determinandae, ut velocitas V fiat maxima.

Ut autem facilior fiat differentiatio, utamur *Logarithmis*, eritque $Log.\ V = Log.\ 16\,.\,v\,.\,M + Log.\ x + Log.\ y + Log.\ z - Log.\,(M + x) - Log.\,(x + y) - Log.\,(y + z) - Log.\,(z + m)$.

Sic si differentietur erit,

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{z} - \frac{\partial x}{M + x} - \frac{\partial x + \partial y}{x + y} - \frac{\partial y + \partial z}{y + z} - \frac{\partial z}{z + m},$$

sive si omnes termini multiplicentur per $x\,.\,y\,.\,z\,.\,(M + x)\,.\,(x + y)\,.\,(y + z)\,(z + m)$, dein dividantur,

$$\frac{\partial V}{V} = zy(M + x)\,(x + y)\,(y + z)\,(z + m)\partial x + zx(M + x)\,(x + y)\,(y + z)(z + m)\partial y$$
$$+ yz\,(M + x)\,(x + y)\,(y + z)\,(z + m)\,\partial z - x.y.z\,(x + y)\,(y + z)\,(z + m)\partial x$$
$$- x.y.z\,(M + x)\,(y + z)\,(z + m)\,\partial x - x.y.z\,(M + x)\,(y + z)\,(z + m)\,\partial y$$
$$-$$

(4) Vid. *Grondbegins. der Werktuigkunde*, door J. Blassiere, § 170. pag. 64. anno 1764. Desagulierius, *Proefondervindelijke Natuurkunde*, II Deel, pag. 110 et 111: aliique.

$- x.y.z\,(M+x)\,(x+y)\,(z+m)\,\partial y - x.y.z\,(M+x)\,(x+y)\,(z+m)\,\partial z$
$- x.y.z\,(M+x)\,(x+y)\,(y+z)\,\partial z.$

Sed omnes termini per $x.y.z\,(M+x)\,(x+y)\,(y+z)\,(z+m)$ dividi debent. Sin autem colligantur termini qui multiplicantur per ∂x, ∂y et ∂z, habemus,

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{(M+x)(x+y) - x(x+y) - x(M+x)}{x\,(M+x)\,(x+y)}\partial x + \frac{(x+y)(y+z) - y(y+z) - y(x+y)}{y\,(x+y)\,(y+z)}\partial y$$
$$+ \frac{(y+z)\,(z+m) - z\,(z+m) - z\,(y+z)}{z\,(z+y)\,(z+m)}\partial z,$$

id est, si rite omnia reducantur,

$$\partial V = V.\frac{My - x^2}{x(M+x)\,(x+y)}.\partial x + V.\frac{xz - y^2}{y\,(x+y)\,(y+z)}.\partial y + V.\frac{ym - z^2}{z\,(z+y)\,(z+m)}.\partial z.$$

Ergo $\frac{\partial V}{\partial x} = V.\frac{My - x^2}{x\,(M+x)(x+y)}$; $\frac{\partial V}{\partial y} = V.\frac{xz - y^2}{y\,(x+y)\,(y+z)}$; $\frac{\partial V}{\partial z} = V.\frac{my - z^2}{z(z+y)\,(z+m)}$.

Et cum pro maximo $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ esse oporteat, habemus ad determinandas x, y et z, has tres aequationes:

$$\left.\begin{array}{r} My - x^2 = 0 \\ xz - y^2 = 0 \\ ym - z^2 = 0 \end{array}\right\} \text{ unde sequitur } \left\{\begin{array}{l} M : x = x : y \\ x : y = y : z \\ y : z = z : m. \end{array}\right.$$

Ergo $M : x = x : y = y : z = z : m.$

Hinc igitur sequitur, massas omnes constituere progressionem geometricam, si corpus extremum accipiat maximam velocitatem. Idque non modo obtinet de tribus massis intermediis, ut nostro casu; sed quotquot sint massae, *corpus ultimum, tum accipiet maximam velocitatem, cum massae constituant inter se progressionem geometricam.* Igitur datis massis m et M, inveniuntur massae corporum intermediorum, si inter M et m tot interpolentur termini, qui geometricam progressionem constituant, quot rogantur corpora: sic nostro casu facile invenitur

$$x = \sqrt[4]{M^3 m};\ y = \sqrt[4]{M^2 m^2};\ z = \sqrt[4]{M m^3}.$$

His valoribus utendum est in variis terminis differentialis secundae: hujus differentialis inventio, si norma vulgari instituatur, nimis molesta est: quam ob causam **Lagrange**, ut hoc evitetur, hanc sequitur viam: fac

$$\frac{V}{x\,(M+x)\,(x+y)} = \alpha;\ \frac{V}{y\,(x+y)\,(y+z)} = \beta \text{ et } \frac{V}{z\,(z+y)\,(z+m)} = \gamma,$$

erit $\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha\,(My - x^2)$; $\frac{\partial V}{\partial y} = \beta\,(xz - y^2)$; $\frac{\partial V}{\partial z} = \gamma\,(ym - z^2)$.

Vocetur ratio perpetua progressionis geometricae r, erit illa progressio hujusmodi:

M,

$$\begin{array}{ccccc} M, & rM, & r^2M, & r^3M, & r^4M, \\ M, & x, & y, & z, & m. \end{array}$$

Ergo si hoc substituatur in superioribus valoribus, erit:

$$\alpha = \frac{V}{rM\,(M + rM)\,(rM + r^2M)} = \frac{V}{r^2M^3\,(1+r)^2},$$

$$\beta = \frac{V}{r^2M\,(rM + r^2M)\,(r^2M + r^3M)} = \frac{V}{r^5M^3\,(1+r)^2} = \frac{\alpha}{r^3},$$

$$\gamma = \frac{V}{r^3M\,(r^2M + r^3M)\,(r^3M + r^4M)} = \frac{V}{r^8M^3\,(1+r)^2} = \frac{\alpha}{r^6}.$$

Jam vero si differentientur valores differentialium $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{DV}{\partial z}$, habemus ob $Mx - x^2 = 0;\; xz - y^2 = 0;\; ym - z^2 = 0$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x} = \alpha\,(M\partial y - 2x\partial x)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y} = \beta\,(x\partial z + z\partial x - zy\partial y) = \frac{\alpha}{r^3}\,(x\partial z + z\partial x - zy\partial y),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z} = \gamma\,(m\partial y - 2z\partial z) = \frac{\alpha}{r^6}\,(m\partial y - 2z\partial z).$$

Ergo $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\,2\alpha x = -\,2\alpha r M,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\,\frac{2\alpha y}{r^3} = -\,\frac{2\alpha r^2 M}{r^3} = -\,\frac{2\alpha M}{r},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\,\frac{2\alpha z}{r^6} = -\,\frac{2\alpha r^3 M}{r^6} = -\,\frac{2\alpha M}{r^3}.$$

Ergo cum α semper positiva sit, erunt differentiales secundae negativae, et prima haec est maximi conditio. Habemus porro

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} = \alpha M;\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z} = 0;\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z . \partial y} = \frac{\alpha M}{r^2},$$

igitur $$1^\circ.\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 4\alpha^2M^2 \text{ major quam } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right) = \alpha^2M^2;$$

$$2^\circ.\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{4\alpha^2M^2}{r^2} \text{ major quam } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z}\right)^2 = 0;$$

denique

$$3^\circ.\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}\right) \times \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z}\right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}\right) = \frac{3\alpha M}{2r} \times \frac{2\alpha M}{r^3} = \frac{3\alpha^2M^2}{r^4},$$

major est quam

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z . \partial y} - \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z}}{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z . \partial y}\right)^2 = \frac{\alpha^2M^2}{r^4}.$$

Itaque cum omnes conditiones conveniant, locum obtinebit maximum inventum.

SECTIO ALTERA.

THEORIA DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM INTEGRALIUM INDEFINITARUM.

INTRODUCTIO.

1. Quas in parte priori tradidimus regulas, ad maxima minimave invenienda necessarias, in iis semper requirebatur, ut quantitates, de quibus maximorum aut minimorum esset investigatio, innotescerent in functione aliarum quantitatum, a quibus penderent; id est, maxima et minima investigabantur, lege manente eadem, qua hae quantitates, cum aliis, a quibus pendebant, erant conjunctae; eaque lex, aequatione determinata, oculis proposita erat. Sed hic non est limes, quo ulterius progredi prohibemur; namque, quas considerationes instituimus, de elementis talius functionis, quae certa lege determinata esset, eas nos institui posse de hâc ipsa conjunctionis lege, quisque intelligit.

Hae autem considerationes natura difficiliores sunt; nam, ut supra variatio, quam quantitas, ut ad maximum aut minimum accrescendi vel decrescendi gradum perveniat, subire debet, facile inveniebatur, lege innotescente, qua haec quantitas cum aliis conjuncta esset; sic nunc lege illa immutante, iisdem principiis non invenitur, quomodo illa lex sit oportet, ut quantitatum conjunctio, quam proponit, maximum fiat aut minimum. Etenim cum legis mutatio non detur, neque etiam adest relatio harum quantitatum ad alias: sed haec relatio *a priori* plane indeterminata est. Ergo cum hîc non dentur principia, quibus maximorum et minimorum investigatio, quam supra exhibuimus, nititur, neque etiam in hac parte inservient regulae traditae: sed hae regulae ex aliis principiis, id est ex alio calculi, quam differentialis calculi genere, hauriantur, necesse est.

2. Minima distantia duorum punctorum ad se invicem, est linea recta, per haec puncta transiens: haec est res omnibus cognita; sed cogitemus, ut fieri potest, nos hanc proprietatem nescire, et sequentem quaestionem ponamus: *Inter omnes innumeras curvas*, ACDB, AEFB *caetera*, *Fig.* 23, *quae per duo data puncta* A et B *transire possunt*, *eam invenire*, *cujus longitudo est quantitas minima?* Nunc igitur nil fere datum est; non constat determinata relatio, inter abscissas x et ordinatas y lineae curvae, sed haec relatio, id est forma aequationis lineae curvae, quae dictam habet proprietatem, invenienda est. Longitudo cujusvis curvae invenitur, si ex ejus aequatione differentiali, inveniamus haec

haec elementa, ∂x^2 et ∂y^2, atque si functionem $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ calculo Integrali subjiciamus: igitur cum aequatio, sive lex, ex qua haec functio determinatur, incognita sit, nil cognoscimus, praeter hanc functionem indefinitam $\int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$; igitur haec functio, tamdiu varietur, donec valorem minimum attingat, quaeritur. En novum genus quaestionum, quarum solutiones, ex summo Analyseos fastigio, quaeri debent, et de quibus, in hac altera parte tractare conabor; tamen, utpote tiro, qui ob vires tenuissimas, hujus analyseos partis indolem penitus nondum perspexerit, sed potius ad superficiem ejus materiam tetigerit.

3. Calculus, qui requiritur, ad variationem dictae legis inveniendam, vocatur CALCULUS VARIATIONUM; cujus inventor fuit summus Lagrange. Etenim, quamquam Janus Bernouillius hujus calculi indolem intellexerit, et quamquam Eulerus integrum librum conscripserit, quo solutiones omnium ejusmodi quaestionum continentur, quae ad maxima et minima formularum integralium indefinitarum respiciunt, easque certis regulis subjecerit (1) tamen ille Lagrange, omnem illam Analyseos partem redegit, et sub forma novi calculi proposuit.

4. Cum differentialis alicujus quantitatis, significetur per litteram d, Lagrange ejusdem quantitatis variationem indicat per *graecam litteram minorem* δ; igitur, cum ∂x significet *differentialem ipsius* x, erit δx *ejusdem* x *variatio*. Caeterum quod ad regulas hujus calculi, eaedem sunt ac regulae calculi differentialis, hac sola intercedente differentia, quod, cum in aliqua functione $\phi\,(x,\ y,\ z$ caet.$)$, ∂x, ∂y, caetera, ex ea determinata functione, constantem in genere inter se habeant relationem, talis relatio non adsit inter δx, δy caet.; sed haec a se invicem non pendent; pro lubitu sumi possunt; quoniam, uti supra diximus, lex, qua omnis functio in hoc calculo variatur, prorsus indefinita est.

5. De hoc calculo, qui, quod ad quaestiones de maximis et minimis pertineat, latissime patet, perpauca adhuc scripta sunt; quae autem scripta inveniuntur, ejusmodi ea esse mihi videntur, quae non, nisi assidua lectione et magno studio, percipiantur. Etenim quae ipse inventor Lagrange, nobis tradidit, ab eo tantummodo intelliguntur qui hujus calculi principiis initiatus est (2).

Alii

(1) Videatur Historia hujus calculi apud Montuclam, *Histoire des Mathematiques*, Tom. III. Liv. I. § XXXIV. pag. 352 — 355. Haec historia etiam continet historiam de maximis et minimis functionum Integralium indefinitarum: his enim calculus variationum originem debet.

(2) Scripsit Lagrange de hoc calculo quaedam in Tomo II et IV, *Miscellaneorum Taurinensium*. Postea alio modo in hac re, quoad maxima pertinet, elaboravit in suo opere *des fonctions Analytiques*, Part. II. Chap. XII et XIII. pag. 272 — 297. Hac Methodo autem non utemur. Denique quaedam, eaque, ut mihi videtur, omnium maxime perspicua, inveniuntur in alio ejus opere, *Mecanique Analytique*, Tom. I. Part. I. Sect. IV. § II. No. 15 et seq. Nam-

Alii autem, qui de hoc calculo scripserunt, uti Cousin in suo opere *Lecons de calcul Differentiel et Integral*, Tom. II, pag. 721 sqq. *aliique*, suo quisque modo, hi aut non omni perspicuitate rem proposuerunt, aut in omnibus, quae de hac re cogitari et dici possunt, non elaborarunt.

Etenim si cum his ea conferamus, quae Eulerus scripsit in suo excellenti opere, *Methodus inveniendi lineas curvas, maximi minimive proprietate gaudentes, seu solutio problematis Isoperimetrici, latissimo sensu accepti*, quisque videt, multum adhuc in hoc calculo, si non inelaboratum, at certe non omni perspicuitate et copia pertractatum esse. Hanc ob causam, ea tantum proferam, quae intellexi, et in his ipsis brevis esse debeo, ne aut talia proferam, quae propter principia, (quae hoc loco exponere non possum,) aliunde petenda, obscura videantur, aut, ne nimis longam hanc commentationem reddam. Exempla perpauca attuli, quoniam plerarumque quaestionum solutiones, quae in hoc calculi genus cadunt, ejusmodi sunt, de quibus integrum volumen conscribi posset.

CAPUT PRIMUM.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONIS INTEGRALIS INDEFINITAE $\int v \partial x$, CUM v EST FUNCTIO QUANTITATUM, x, y, z CAET. EARUMQUE RELATIONUM DIFFERENTIALIUM $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ CAET., $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ CAET., CAETERA.

1. Principia calculi variationis haec sunt (1).

1°. *Variatio alicujus differentialis, aequalis est differentiali ipsius variationis.*

Nam, quamquam non est hujus loci hoc principium omni evidentia mathematica exponere, tamen quisque hujus principii veritatem, quasi e longinquo, praesentit; si functio quaedam, primum differentietur, tum varietur, idem obtinebimus, ac si haec functio primum esset variata, tum differentiata; idque sic proponitur:

$$\delta \cdot [\partial \cdot \phi(x)] = \partial \cdot [\delta \cdot \phi(x)].$$

2°. Si-

que et tantam operam in Analysi praestitit, ut omnia fere Mechanices problemata, eo perduxerit, quae penderent a maximae minimaeve quantitatis determinatione.

(1) Vid. Ill. Lagrange, *Mecanique Analytique*, Tom. I. Prem. Part. Sect. II. pag. 84 et 85. art. 14 et 15.

2°. *Simili modo erit variatio integralis, cujusvis functionis differentialis, aequalis integrali variationis ejusdem differentialis functionis.*

Id est si v sit illa functio differentialis, erit:

$$\delta \,.\, \int v = \int \delta . v.$$

Simili modo erit $\delta \,.\, \partial^2 x = \partial^2 . \delta x$: caetera et $\delta^2 . \int v = \int \delta^2 . v$ caetera.

2. His praemissis, sit functio proposita v, talis functio, qua continentur quantitates variabiles x, y, z caet. $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ caet, quae functio igitur, simplicitatis gratiâ, pertinere intelligatur ad curvam simplicis vel duplicis curvaturae AB, *Fig.* 24. Haec autem functio, cum in genere ad talem curvam pertineat, prorsus indeterminata est; sumatur hujus functionis integralis, id est, mutatis verbis, sumatur summa valorum hujus functionis, a limite quodam a usque ad alium quemdam limitem b. Sint igitur puncta A et B hi limites: eo modo functio $\int v \partial x$ erit aequatio indeterminata, quamplurium curvarum, quae tamen in eo sunt determinatae ut ad easdem limites A et B pertineant.

Ergo functio indeterminata $\int v \partial x$ pertinet ad infinitas lineas curvas, quae eosdem limites A et B communes habent, id est nostro casu, quae per data duo puncta transire coactae sunt.

Nostro casu igitur investigatio maximi aut minimi functionis indeterminatae $\int v \partial x$, reducta est ad hanc questionem: *datis duobus punctis* A *et* B *positione, per quae puncta innumerae curvae transeant, invenire eam curvam, in qua functio indeterminata* $\int v \partial x$ *fiat maximum aut minimum.*

3. Haec proprietas maximi aut minimi, judicetur ex valoribus antecedentibus aut subsequentibus maximo aut minimo, necesse est. Igitur si AB sit curva in qua valor functionis $\int v \partial x$ est maximum aut minimum, et ducantur curvae AcdB, A$c'd'$B huic quam proximae, erit ex Theoremate Tayloriano, si elementa x, y caet. $\frac{\partial y}{\partial x}$ caet. crescant aut decrescant certis quantitatibus, (quod increm. aut decrem. pro omnibus notabo per i,) valor increm. aut decrem. functionis $\int v \partial x$ pro curva antecedente AcdB (Ω denotante incrementum aut decrementum, quod in functione obtinet),

$$\Omega = + \frac{\delta . \int v \partial x}{\delta x} . i + \frac{\delta^2 . \int v \partial x}{\delta x^2} . i^2 + \frac{\delta^3 . \int v \partial x}{\delta x^3} . i^3 + \text{caet.}$$

pro curva A$c'd'$B erit,

$$\Omega' = - \frac{\delta . \int v \partial x}{\delta x} . i + \frac{\delta^2 . \int v \partial x}{\delta x^2} . i^2 - \frac{\delta^3 . \int v \partial x}{\delta x^3} . i^3 \text{ caet.}$$

Si curva ACDB gaudeat dicta maximi aut minimi proprietate, oportet ut pro maximo, tum in curva AcdB, tum in A$c'd'$B, Ω sit negativum, pro minimo autem positivum; ergo si incrementum exiguum adeo sit, ut superiorum serierum, summa terminorum sequen-

quentium multo minor sit quam solus praecedens terminus, haec summa negligi poterit, eritque,

$$\Omega = + \frac{\delta . \int v \partial x}{\delta x}, \qquad \Omega' = - \frac{\delta . \int v \partial x}{\delta x}.$$

Ergo hinc sequitur, eodem modo ac in priori parte fusius explicavimus, in curva, ubi maximi aut minimi proprietas locum obtineat, $\frac{\delta . \int v \partial x}{\delta x}$ nihilo aequalem esse debere. Ex hac igitur aequatione,

$$\frac{\delta . \int v \partial x}{\delta x} = 0,$$

determinatam requirere debemus functionem differentialem, quae si integretur praebebit aequationem curvae, aut quantitatis functionem, in qua adest maximum aut minimum rogatum.

Sic etiam si $\frac{\delta^2 . \int v \partial x}{\delta x}$ sit positivum pro curva inventa, aderit minimum; si negativum, aderit maximum; et, verbo, quod in superiori parte de maximi aut minimi praesentia dictum est, etiam hoc loco valet.

4. Tradamus autem nunc, quamnam formam adipiscatur $\delta . \int v \partial x$, si v sit differentialis functio, duarum variabilium x, y, earumque relationum differentialium $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ caet. posito ∂x constantem et δx constantem.

Ratio qua variatio talius functionis invenitur, hic exponere non possum; variationem hujus generalis formulae descripsi, ex opere saepius citato Cl. La Croix, Tom. II. § 853. pag. 768. Sufficiet igitur breviter indicasse, quomodo illam functionem obtinere possumus:

ponamus $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = q$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial y}{\partial x} = r$ caet. erit ∂v hujus formae,

$$\partial v = M \partial x + N \partial y + P \partial p + Q \partial q + \text{caet.}$$

in qua formula M, N, P, Q sunt coëfficientes ex differentiatione profectas, quae sic inveniuntur, uu notum est,

$$M = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial v}{\partial p} \text{ caet.}$$

id est M aequalis est differentiali datae functionis, supposito x esse variabilem, *caetera*. Sic etiam erit,

$$\delta v = M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + \text{caet.} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

est autem $\delta p = \delta . \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x \delta . \partial y - \partial y \delta \partial x}{\partial x^2}$,

id

id est, ob $\delta\partial y = \partial\delta y$ et $\delta\partial x = \partial\delta x$, $\delta p = \frac{\partial\delta y}{\partial x} - \frac{\partial y . \partial\delta x}{\partial x^2}$: sin autem ∂x constans sit, erit $\delta . \partial x = 0$, et $\delta p = \frac{\partial\delta y}{\partial x}$; et sic etiam de reliquis.

Porro attendendum est, quoniam $\partial . sx = s\partial x + x\partial s$, esse $\int s\partial x = sx - \int x\partial s$; ergo, ejusmodi functio $s\partial . \delta x$ si integretur, erit semper,

$$\int s\partial . \delta x = s . \delta x - \int \delta x . \partial s,$$

(quod Galli vocant *integrer par parties*,) et in tali integratione, cum quaecunque integralis suos habeat limites, terminum $s . \delta x$, qui extra characterem $\int$ integralem cadit, ad limites pertinere, perspicuum est. Igitur si in functione (α) sive in δv, substituantur valores $\delta\frac{\partial y}{\partial x}, = \delta p$, caetera, dein multiplicetur per ∂x, ac tum integretur, ratione habita dictae integrationis, obtinemus hanc formulam generalem, in qua

$$\omega = \delta y - p\delta x:$$

$$\int \delta v\partial x = \delta\int v\partial x = v\delta x + \omega\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \text{caet.}\right) + \frac{\partial\omega}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \text{caet.}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2\omega}{\partial x}\left(R - \frac{\partial S}{\partial x} + \text{caet.}\right). + \text{caetera} + \int\omega . \partial x\left(N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \text{caet.}\right). (1)$$

si autem v esset functio trium variabilium earumque relationum differentialium, esset etiam:

$$\partial v = M\partial x + N\partial y + O\partial z + P\partial p + Q\partial q + \text{caet.} + P'\partial p' + Q'\partial q' + \text{caet.},$$

posito scilicet $p' = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; erit $\omega' = \delta z - p'\delta x$; et

$$\delta\int v\partial x = v\delta x + \omega\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \text{caet.}\right) + \frac{\partial\omega}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \text{caet.}\right) + \text{caet.}$$
$$+ \omega'\left(P' - \frac{\partial Q'}{\partial x} + \frac{\partial^2 R'}{\partial x^2} + \text{caet.}\right) + \frac{\partial\omega'}{\partial x}\left(Q' - \frac{\partial R'}{\partial x} + \frac{\partial^2 S'}{\partial x^2} - \text{caet.}\right) + \text{caetera}$$
$$+ \int\omega . \partial x\left(N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \text{caet.}\right) + \int\omega' . \partial x\left(O - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \text{caet.}\right).$$

In presenti autem loquimur de variatione functionis duarum variabilium.

5. Si vocemus illam partem formulae (1) quae extra integralem characterem invenitur A, partem sub illo charactere (X); erit

$$\delta . \int v . \partial x = A + \int\omega\partial x\,(X); \quad \frac{\delta\int v\partial x}{\delta x} = \frac{A}{\delta x} + \frac{1}{\delta x}\int\omega\partial x\,(X).$$

Si maximum aut minimum locum habeat, fiet $\frac{\delta\int v\,\partial x}{\delta x} = 0$, ergo

$$\frac{A}{\partial x} + \frac{1}{\delta x}\int\omega\partial x\,(X) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

terminus $\frac{A}{\delta x}$ refertur ad limites integralis; $\int\omega\partial x\,(X)$ autem pertinet ad curvam intra il-

illos limites, et cum hanc curvae partem praecipue consideremus, oportet ut pro maximo aut minimo fiat

$$\int \omega \partial x \,.\, (X) = o,$$

id est, $\int(X) = o$, sive $N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \text{caet.} = o$ . . . . . . (γ)

haec igitur functio praebebit aequationem differentialem determinatam, quae si integretur proveniet aequatio curvae quaesitae.

Quum igitur in aequatione (β) sit $\int \omega \partial x\, (X) = o$, erit etiam $\frac{A}{\partial x} = o$, id est, si A' est valor hujus functionis in primo limite, A'' in altero limite, erit, intra limites:

$$\frac{A'' - A'}{\partial x} = o, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\delta)$$

atque haec est altera aequatio quae pro maximo et minimo etiam obtinet, eaque cum referatur ad limites cognitos, eamque ob causam nil continet nisi quantitates constantes, inservire potest ad determinandas constantes arbitrarias, ex integratione ortas.

6. De hac postrema aequatione et de constantibus arbitrariis, quae ex integratione proveniunt, haec pauca dicantur, priusquam ad exempla transeamus.

Quaevis functio differentialis, si integretur, semper ex integratione oriuntur quaedam quantitates constantes seu arbitrariae, quae, si functio differentietur, iterum evanescunt. Hae quantitates, cum sint arbitrariae, pro curva, in qua maximi minimive proprietas locum obtinet, fiant determinatae necesse est; hoc vulgo instituitur considerando, quemnam valorem habet integralis, initio, ubi curva incipit, et in fine, ubi desinit; quod nihil est aliud, quam functio illa, intra duos limites integrare; ergo hi limites noti sint requiritur.

Si duae v. c. adsint quantitates variabiles atque in aequatione (γ) non nisi termini N et $\frac{\partial P}{\partial x}$ contineantur, aequatio (γ), erit aequatio differentialis secundi ordinis: et curva linea determinata erit, si coacta sit transire per duo puncta cujus coördinatae datae sunt.

Aequatio (δ), nimirum: $\qquad \frac{A'' - A'}{\partial x} = o,$

in genere est hujus formae (si v. c. tres adsint variabiles x, y, z, neque earum differentiales relationes,)

$$(a''\partial x'' + b''\partial y'' + c''\partial z'') - (a'\partial x' + b'\partial y' + c'\partial z') = o,$$

ergo si curva habeat limites fixos, data curvae puncta in his limitibus non variantur, sed ingenere erit $\partial x'' = o$, $\partial x' = o$, $\partial y'' = o$, $\partial y' = o$, $\partial z'' = o$, $\partial z' = o$. Igitur tali modo aequationi (δ) sponte satisfacimus, ponendo has variationes, nihilo aequales. Sed tum etiam erunt $a'' = o$, $b'' = o$ caet. atque hae aequationes, uti in exemplis ostendetur, inservient ad constantes arbitrarias determinandas. Si autem aequatio (γ) insu-

per

per contineret terminum $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$, aequatio illa esset aequatio differentialis quarti ordinis, et quatuor igitur oriuntur constantes arbitrariae; igitur si limites curvae fixi datique sint, quatuor puncta, quorum coördinatae determinatae sunt, sufficient, ad curvae positionem determinandam; sed et alio modo curva determinata erit. Namque si in aequatione (γ) contineatur $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$, aequatio ($\delta$) etiam continebit terminum hujus formae $A\delta . \frac{\partial y}{\partial x}$ caet. ita ut sit hujus formae, $a''\delta x'' + b''\delta y'' +$ caet. $+ h''\delta . \frac{\partial y''}{\partial x''} + i''\delta . \frac{\partial z''}{\partial x''}$ $+$ caet. $- (a'\delta x' + b'\delta y' +$ caet. $+ h'\delta . \frac{\partial y'}{\partial x'} + i'\delta . \frac{\partial z'}{\partial x'}$ caet.$) = 0$. Ergo cum limites sint fixi, erit in hisce punctis: $\delta x'' = 0$, $\delta x' = 0$ caet. $\delta . \frac{\partial y''}{\partial x''} = 0$ caet. $\delta . \frac{\partial y'}{\partial z'} = 0$ caet.; sed $\frac{\partial y''}{\partial x''}$, $\frac{\partial y'}{\partial x'}$ sunt tangentes angulorum, inter tangentes lineae curvae in limitibus, et inter axim abscissarum; igitur, sicuti in his limitibus $x = a$, $y = b$ caet. sic etiam erunt $\frac{\partial y''}{\partial x''}$, $\frac{\partial y'}{\partial x'}$ quantitates constantes; ergo in his punctis dicti anguli, determinatae sunt magnitudinis. Sufficiet igitur, ut curva per duo puncta data transeat, atque ut duo dicti anguli inlimitibus dentur. His autem quatuor datis, constantes arbitrariae, quae curvam determinant, ope aequationum $a'' = 0$, $b'' = 0$ caet. inveniuntur.

Sic si aequatio finalis (γ) superioris sit gradus, simili modo ex aequatione (δ) aliae hauriuntur conditiones, quibus constantes arbitrariae determinantur, manentibus scilicet limitibus fixis.

Sed fieri potest ut curvae puncta in limitibus, super lineam curvam aut superficiem aut alio modo moveantur, quo in casu illi limites non sunt fixi sed variantur; igitur, tum δx, δy, δz in limitibus non constantes sunt, sed pendent a natura curvae seu superficiei super quam moveri coactae sunt; si igitur aequationes illarum curvarum seu superficierum datae sint, ex his aequationibus, si variantur, prodibunt quaedam variationes δx, δy aut δz; igitur ope harum variationum determinatarum, ejici possunt, ex aequatione (δ) tantae variationes δx, δy, δz, ut reliquae, quae in illa aequatione manent, prorsus a se invicem non pendeant, qua ratione aequatio (δ), quae ita liberata est a variationibus, quae a se invicem pendent, (et in qua tum intrat conditio memorata, scilicet ut limites per curvam seu superficiem moveantur,) inservire potest ad determinandas constantes arbitrarias.

De hac postrema consideratione multa adhuc dicenda manent, eaque, si locum obtineat, difficilius reddit problematum solutiones; sed cum propter difficultates, talia pro-

problemata exponere non constituerim, in quibus ejusmodi conditionibus satisfieri oportet, de his plura non dicam. Plura autem inveniuntur in opere citato Cl. La Croix l. c. quo, ubi exempla tradit, passim etiam indicat, quid in talibus casibus agendum est.

7. Eulerus in suo egregio opere *Methodus inveniendi caet.*, ad similem aequationem, atque aequatio (γ), pervenit; non autem formulam generalem uti formula (1) tradit: ad minimum aut maximum inveniendum, profert quidem aequationem (γ), sed nullam facit mentionem aequationis (δ), quae ad constantes arbitrarias determinandas inservit: quae profert, ea generali modo non profert, sed pedetentim ad ea pervenit. Sic, quod de functione v, ex qua $\partial v = M\partial y + P\partial p +$ caetera, exhibuimus, demonstrat primum de tali functione v, quae praebet $\partial v = M\partial x + N\partial y$; tum de v, ex qua $\partial v = M\partial x + N\partial y + P\partial p$; deinde si $\partial v = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q$, et sic porro (2). In his igitur elucet emolumentum, quod calculus variationum nobis praebet; scilicet, quod methodo generaliori ea proferat et luce clariori oculis proponat, quae veteres non nisi magno studio et multis ratiociniis manifestum reddebant.

8. Diximus supra, N°. 3, maximi aut minimi praesentiam indicari ex functione $\int \frac{\delta^2 v}{\partial x^2}$: prouti enim haec functio fiat negativa aut positiva maximum aderit aut minimum. Ratio igitur postularet, ut, quemadmodum functionem $\delta \int v \partial x$, in generalem formulam proposuimus, atque ex ea formula dijudicavimus, quinam termini in curva, maximi aut minimi proprietate praedita, nihilo aequales fierent, sic etiam tractaremus functionem $\delta^2 \int v \partial x$, ut ex formula evoluta judicium ferre possemus, quinam termini positivi, quinam negativi evaderent. Sed hae considerationes cum nimis difficiles longaeque sint, et cum bene multis opus sit exemplis, ad illustrandos, diversos casus, de his nihil dicam (3), sed potius in exemplis viam monstrabo, qua ad maximi minimive judicium certâ normâ pervenire possumus: ad quae exempla nunc transeam.

9. Exemplum I. *Fig.* 25. *Quum per duo puncta* A *et* B, *quae in diversis lineis verticalibus* AX, *et* BY *sita sunt*, *infinitas curvas lineas ducere possimus*, *rogatur eam curvam determinare*, *super quam*, *grave corpus minimo tempore perveniat a puncto* B *ad punctum* A? (4).

In

(2) Vid. ejus op. cit. Prop. II. pag. 34; Prop. III. pag. 42; Prop. IV. pag. 57; Prop. V. pag. 71.

(3) Quaedam de indiciis maximi et minimi inveniuntur apud La Croix, op. cit. Tom. II. § 876. pag. 807 sqq. Ex quibus cernere licet quam difficilis est talium indiciorum generalis investigatio.

(4) Solutiones quas dederunt fratres Bernouillii hujus problematis, ansam praebuerunt ad plures ejusmodi quaestiones; quae, cum calculo variationum originem darent, summo jure illud problema, quod vocant *problema lineae celerrimi descensus*, celebratur: (vid. Lagrange, *Theor.*

In Mechanica docetur, celeritatem, quam corpus, per lineam curvam descendens, in quocunque puncto habet, aequalem esse velocitati, quam adipiscitur corpus, si labatur per ordinatam verticalem, huic puncto convenientem: igitur velocitas quam corpus habet in puncto quodam a, à B lapsum, aequalis est velocitati quam haberet in puncto c, si per lineam verticalem BY, à B usque ad c descenderet (5): ergo si originem coördinatarum ponamus in B, et Bb vocemus y, ba x, erit B$c = x$, et velocitas corporis in puncto $c = \sqrt{2gx}$; $2g$ denotante spatium, per quod grave corpus primo temporis minuto secundo, labitur (6); id est, cum velocitas sit accelerata, si ∂r illam velocitatem acceleratam denotet,

$$\partial r = \sqrt{2gx}, \qquad \text{sive } \partial r^2 = 2gx;$$

haec est velocitas in puncto a, et cum velocitas corporis in ratione composita sit viae confectae et inversae rationis temporis, habemus cum ipsius curvae arcus via sit, (s denotante arcum Ba, t tempus)

$$\partial r^2 = \frac{\partial s^2}{\partial t^2} = 2gx,$$

unde $\partial t = \dfrac{\partial s}{\sqrt{2gx}} = \dfrac{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\sqrt{2gx}} = \dfrac{\partial x . \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}}{\sqrt{2gx}} = \dfrac{\partial x . \sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}$.

Igitur $t = \int \dfrac{\partial x . \sqrt{(1 + p^2)}}{\sqrt{2gx}}$ (7); haec functio igitur minimum evadat necesse est. Habemus itaque in formula (1) N°. 4.

$$v = \frac{\sqrt{(1 + p^2)}}{\sqrt{2gx}}; \; \partial v = \frac{p \partial p}{\sqrt{2gx}\,(1 + p^2)} - \frac{\sqrt{(1 + p^2)}}{2x . \sqrt{2gx}} \partial x.$$

Er-

Theor. des Fonct. Analyt. Part. II. Chap. XIII. § 73. Edit. 1.) Problema solvebant ope calculi differentialis: Talis solutio v. g. invenitur apud Stone, *Analyse des Infinements petits, servant de suite aux infiniments petits du Marquis de* L'Hopital, *contenant le calcul Integral*, pag. 156. Prob. XVI. Eulerus, illud solvit sua Theoria in citato opere *Methodus inveniendi caet.* Exemp. IV. pag. 49 et 50. Quamplures recentiores Mathematici solutionem hujus problematis ope variationum calculi dederunt, in quibus praecipue memorantur Lagrange, *Theor. des Fonct. Anal. loco modo citato*; Poisson, *Traité de Mecanique*, Tom. I. §. 288. pag. 430; Cousin, *Lecons de calcul Differentiel et Integral*, Prem. Part. pag. 347. Nos tradimus solutionem, quantum fieri potest ex fontibus propinquis haustam; eamque ob causam admittimus nos scire, curvam rogatam esse simplicis curvaturae.

(5) Vid. Cl. van der Eyk, *Instit. Phys.*, pag. 47. §. 109.

(6) Haec formula ex theoria vis gravitatis facile invenitur, eaque omnibus constat.

(7) Eulerus in exemplo citato, statim hanc posuit aequationem; sed ratio, qua, integra reddita functione, adsumit constantes arbitrarias, et ad formam curvae concludit, minus dilucida est.

Ergo $M = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2x.\sqrt{(2gx)}}$; $N = 0$; $P = \frac{p}{\sqrt{2gx}.\sqrt{(1+p^2)}}$; $Q = 0$ caet. formula generalis fit igitur:

$$\delta.\int y.\partial x = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}\,\delta x + \omega\,\frac{p}{\sqrt{2gx\,(1+p^2)}} + \int \omega.\partial.\frac{p}{\sqrt{2gx\,(1+p^2)}}.$$

Nostro casu aequatio (γ) fit, $\partial . P = 0$, sive $P = Const. = c$, id est,

$$\frac{p}{\sqrt{2gx\,(1+p^2)}} = c.$$

Ex hac aequatione igitur determinanda erit curvae aequatio; fit autem $p^2 = 2c^2gx\,(1+p^2)$; id est, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2c^2gx\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)$; unde $\partial y^2 = \frac{2c^2gx\partial x^2}{1-2c^2gx}$,

et dividendo per $2c^2g$; $\partial y^2 = \frac{x\partial x^2}{\frac{1}{2c^2g} - x}$.

Sit $\frac{1}{2c^2g} = \gamma$, erit $\partial y = \frac{\partial x\sqrt{x}}{\sqrt{(\gamma - x)}} = \frac{x\partial x}{\sqrt{(\gamma x - x^2)}}$,

haec aequatio ita proponi potest: $\partial y = \frac{\gamma\partial x}{2\sqrt{(\gamma x - x^2)}} - \frac{(\gamma - 2x)\partial x}{2\sqrt{(\gamma x - x^2)}}$,

ergo $y = \int\frac{\gamma\partial x}{2\sqrt{(\gamma x - x^2)}} - \int\frac{(\gamma - 2x)\partial x}{2\sqrt{(\gamma x - x^2)}} + \Gamma$: est autem $\int\frac{\gamma\partial x}{2\sqrt{(\gamma x - x^2)}}$

$= \frac{1}{2}\gamma$ *Arc. Sin. Vers.* $\left(\frac{x}{\frac{1}{2}\gamma}\right)$, et $\int\frac{(\gamma - 2x)\partial x}{2\sqrt{(\gamma x - x^2)}} = \sqrt{(\gamma x - x^2)}$,

ergo $y = \Gamma + \frac{1}{2\gamma}$. *Arc. Sin. Vers.* $\left(\frac{x}{\frac{1}{2}\gamma}\right) - \sqrt{(\gamma x - x^2)}$. In origine est $y = 0$ et $x = 0$, ergo fit $\Gamma = 0$ et aequatio curvae erit,

$$y = \tfrac{1}{2}(\gamma)\ Arc.\ Sin.\ Vers.\left(\frac{x}{\frac{1}{2}\gamma}\right) - \sqrt{(\gamma x - x^2)},$$

quae est aequatio *Cycloïdis*, originem coördinatarum habens in puncto B, et radius circuli generatricis aequalis est $\frac{1}{2}\gamma$ (8).

Constans (γ) determinatur, ope coördinatarum alterius puncti A, sed facillus determinari poterit, ex aequatione (δ), N°. 5, quae ad limites refertur: in aequatione

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{(\gamma x - x^2)}}$$

si ponatur $x = Bb = a$, erit $\frac{\partial y''}{\partial x''} = \frac{a}{\sqrt{(\gamma a - a^2)}} = p''$; si ponatur $x = 0$, erit $\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{0}{\sqrt{(\gamma 0 - 0^2)}} = p' = 0$.

Er-

(8) Vid. La Croix, *Traité élémentaire de calcul differentiel et integral*, §. 102. pag. 127.

Ergo in aequatione (∂) fit

$$A'' = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{(\gamma a - a^2)}\right)}}{\sqrt{2ga}}\partial x + \omega . \frac{\frac{a}{\sqrt{(\gamma a - a^2)}}}{\sqrt{2ga}\left(1+\frac{a^2}{(\gamma a - a^2)}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\gamma a}}{\sqrt{2ga\,(\gamma a - a^2)}}\partial x + \omega\frac{a}{\sqrt{2ga\,.\,\gamma a}}.$$

$$A' = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2g\,.\,0}}\partial x + \omega\frac{0}{\sqrt{2g0}} = \infty\,.\,\partial x + \omega\,.\,\frac{0}{0},$$

ergo, restituto $\omega = \partial y - p\partial x$, quae fiet in A'', $\omega = \partial y - \frac{a}{\sqrt{(\gamma - a^2)}}\partial x$; in A', $\omega = \partial y$, erit

$$A'' - A' = \sqrt{\frac{\gamma}{2g(\gamma a - a^2)}}\partial x + \frac{1}{\sqrt{(2g\gamma)}}\partial y - \frac{a}{\sqrt{2g\gamma\,(\gamma a - a^2)}}\partial x - \infty\,\partial x - \frac{0}{0}\,\partial y. =$$

$$\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2g\,(\gamma a - a^2)}} - \frac{a}{\sqrt{2g\gamma}\,(\gamma a - a^2)} - \infty\right)\partial x + \left(\frac{1}{\sqrt{2g\gamma}} - \frac{0}{0}\right)\partial y;$$

haec functio $= 0$, esse debet, et quum limites sint fixi, erit in his limitibus $\partial x = 0$ et $\partial y = 0$, ergo habemus

$$\sqrt{\frac{\gamma}{2g\,(\gamma a - a^2)}} - \frac{a}{\sqrt{2g\gamma}\,(\gamma a - a^2)} - \infty = 0 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2g\gamma}} - \frac{0}{0} = 0;$$

postrema aequatio nil docet; nam reducta sic fit, $0\,.\,1 = 0\,.\,\sqrt{2g\gamma}$, id est, $0 = 0$; aequatio prima fit $\sqrt{\frac{\gamma}{2g\,(\gamma a - a^2)}} - \frac{a}{\sqrt{2g\gamma\,(\gamma a - a^2)}} = \infty$, id est, $\frac{\gamma\sqrt{\gamma} - a}{\sqrt{2g\gamma\,(\gamma a - a^2)}} = \infty$,

sive $\frac{\sqrt{2g\gamma\,(\gamma a - a^2)}}{\gamma\sqrt{(\gamma - a)}} = 0$, id est, $\sqrt{2g\gamma}\;(\gamma a - a^2) = 0$, unde $\gamma = a$;

ergo justa aequatio cycloïdis determinatae est $y = \frac{1}{2}a\; Arc.\,Sin.\,Vers.\left(\frac{x}{\frac{1}{2}a}\right) - \sqrt{(ax - x^2)}$.

Functio $\partial \int v \partial x$ nostro casu est $= \partial\,.\int \partial x\,.\;\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}$; ut igitur indicetur minimum, oporteet ut $\frac{\partial^2 \int v \partial x}{\partial p^2}$ fiat positiva.

In nostro functione inveniuntur p et x variabiles, quandoquidem autem p pendet ab x, licebit dictam functionem variare supponendo p tantummodo esse variabilem, quam ob causam posuimus:

$$\frac{\partial^2 \int v \partial x}{\partial p^2} \text{ et non } \frac{\partial^2 \int v \partial x}{\partial x^2} \text{ positivam: est autem,}$$

$$\partial^2 \int \partial x\,\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}} = \int \partial x\,.\,\partial^2.\,\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}; \text{ et cum } \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = \frac{1}{\sqrt{2gx\,(1+p^2)}},$$

in genere sit quantitas positiva, si multiplecetur cum ∂x, atque tum integretur ab $x = 0$, usque ad $x = a$, erit semper etiam

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{2gx\,(1+p^2)}},$$

quantitas positiva. Quam ob causam tempus lapsûs in cycloïde erit minimum; eam ob causam cyclois nonnumquam vocatur *curva cellerrimi descensûs* sive *Brachystochrona.*

10. Exemplum 2. *Sit Fig.* 26. OPB *curva ad ordinatas* OQ, PQ *applicata:* OS *evoluta hujus curvae* (ontwondene der kromme), *ac rogetur curvam ita determinare, ut spatium* OPS, *intra curvam* OP, *radium curvaturae* PS, *et evolutam* OS *contentum, fiat minimum?*

Hoc Ploblema invenitur apud Eulerum, op. cit. Exemp. II. pag. 64. Ille tamen in solutione haud usus est ratione dilucida, cum aequationes integratas in alias transformat; eam ob rem in hâc solutione, ut plurimum secuti sumus Cousin, qui ejusdem problematis solutionem praebuit in suo opere *Lecons de Calc. Diff. et Integr.*, Tom. I. pag. 356.

Ducatur linea TS, lineae PS quam proxima, erit Area trianguli PST aequalis areae totius OPS differentiali; id est,

$$\partial \,.\, Areae = \tfrac{1}{2} PS \times TP;$$

est autem PS = radio curvaturae $= R = \frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q}$ (9),

porro $TP = \partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial x \sqrt{(1+p^2)}$; ergo

$$\partial \,.\, Areae = \tfrac{1}{2} \,.\, \partial x \frac{(1+p^2)^2}{q}, \text{ et } Area = A = \tfrac{1}{2}\int \partial x \,.\, \frac{(1+p^2)^2}{q},$$

atque haec functio minimum fiat requiritur. Si illam cum formula (1) comparemus fiet, $v = \frac{(1+p^2)^2}{q}$; $\partial v = \frac{4p(1+p^2)\partial p}{q} - \frac{(1+p^2)^2 \partial q}{q^2}$.

Igitur M = o; N = o; $P = \frac{4p(1+p^2)}{q}$; $Q = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}$; formula generalis nostro casu erit,

$$\partial \,.\, \int v \partial x = v\delta x + \omega\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} Q + \int \omega \partial x\left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x}\right).$$

Pro minimo erit $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x} = o$; sive $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$; hinc $\frac{\partial Q}{\partial x} = P - C$, sive

$$C - P + \frac{\partial Q}{\partial x} = o.$$

Multiplicetur haec aequatio per $\partial p = q\,\partial x$, eritque

$$C\partial p - P\partial p + q\partial Q = o,$$

est autem generali modo $\partial v = P\partial p + Q\partial q$; et summa harum aequationum est,

Q∂q

(9) Vid. Cl. de Gelder, *Differ. Rek.*, §. 81. pag. 203.

$$Q\partial q + q\partial Q + C\partial p - \partial v = 0\text{: et integrando } Qq + Cp + D = v,$$

D denotante novam arbitrariam constantem. In hac formula igitur fiat substitutio, eritque,

$$-\frac{(1+p^2)^2}{q} + Cp + D = \frac{(1+p^2)^2}{q}\text{; seu } 2(1+p^2)^2 = Cpq + Dq,$$

$$\text{sed } q = \frac{\partial p}{\partial x}\text{; ergo } 2(1+p^2)^2 = Cp\frac{\partial p}{\partial x} + D\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\text{unde } \partial x = \tfrac{1}{2}\frac{(D+Cp)\partial p}{(1+p^2)^2} = \tfrac{1}{2}\frac{Cp\,\partial.p}{(1+p^2)^2} + \tfrac{1}{2}\frac{D\,\partial.p}{(1+p^2)^2},$$

$x = \tfrac{1}{2}C\int\frac{p\partial p}{(1+p^2)^2} + \tfrac{1}{2}D\int\frac{\partial p}{(1+p^2)^2} + E$. Est autem $\int\frac{p\partial p}{(1+p^2)^2} = -\frac{1}{(1+p^2)}$; porro, cum $\frac{\frac{1}{2}D\partial p}{(1+p^2)^2} = \frac{\frac{1}{2}D\partial p + \frac{1}{2}Dp^2\partial p - \frac{1}{2}Dp^2\partial p}{(1+p^2)^2} = \frac{\frac{1}{4}D(1+p^2)\partial p - \frac{1}{2}Dp^2\partial p}{(1+p^2)^2}$ $+ \frac{\frac{1}{4}D(1+p^2)\partial p}{(1+p^2)}$, erit $\int\frac{\frac{1}{2}Ddp}{(1+p^2)^2} = \frac{\frac{1}{4}Dp}{(1+p^2)} + \tfrac{1}{4}D\frac{\partial p}{(1+p^2)}$;

ergo $x = -\frac{4C - Dp}{4(1+p^2)} + \tfrac{1}{4}D\int\frac{\partial p}{(1+p^2)} + E$, id est, ob $\int\frac{\partial p}{(1+p^2)} = \mathit{Arc.\ Tang.}\ (p)$,

$$x = -\frac{4C - Dp}{4(1+p^2)} + \tfrac{1}{4}D\ \mathit{Arc.\ Tang.}\ (p) + E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\lambda)$$

Est autem $\partial y = p\partial x$; ergo $y = \int p\partial x + F = px - \int x\partial p + F$, id est, substituta x:

$$y = Ep - \frac{4Cp - Dp^2}{4(1+p^2)} + \tfrac{1}{4}Dp\ \mathit{Arc.Tang.}(p) - E\int\partial p + \int\frac{4C - Dp}{4(1+p^2)}\partial p - \tfrac{1}{4}D\int\partial p\int\frac{\partial p}{(1+p^2)} + F;$$

$$\int\partial p\int\frac{\partial p}{(1+p^2)} = p\int\frac{\partial p}{(1+p^2)} - \int\frac{p\partial p}{(1+p^2)} = p.\ \mathit{Arc.Tang.}\ (p) + \tfrac{1}{2}\ \mathit{Log.}\ (1+p^2);$$

$$\int\frac{4C\partial p - Dp\partial p}{4(1+p^2)} = C\ \mathit{Arc.\ Tang.}\ (p) - \tfrac{1}{8}D\ \mathit{Log.}\ (1+p^2).$$

Ergo $y = -p\,.\,\frac{4C - Dp}{4(1+p^2)} + \tfrac{1}{4}Dp\ \mathit{Arc.\ Tang.}\ (p) + C\ \mathit{Arc.\ Tang.}\ (p)\ \ldots.$

$- \tfrac{1}{8}D\ \mathit{Log.}(1+p^2) - \tfrac{1}{4}Dp\ \mathit{Arc.Tang.}(p) - \tfrac{1}{8}D\ \mathit{Log.}(1+p^2) + F = F - p.\frac{4C - Dp}{4(1+p^2)}$ $+ C\ \mathit{Arc.\ Tang.}\ (p)$.

Ex aequatione (λ) deducitur; $\mathit{Arc.\ Tang.}\ (p) = \frac{x}{\frac{1}{4}D} - \frac{E}{\frac{1}{4}D} + \frac{4C - Dp}{D(1+p^2)}$;

ergo $y = F - \frac{4Cp - Dp^2}{D(1+p^2)} + \frac{4Cx}{D} - \frac{4EC}{D} + \frac{4C^2 - DCp}{D(1+p^2)}$.

$$Dy - 4Cx = DF - 4CE - \frac{4CDp - D^2p^2}{4(1+p^2)} + \frac{16C^2 - 4DCp}{4(1+p^2)} = DF - 4CE + \frac{(4C - Dp)^2}{4(1+p^2)};$$

fac $DF - 4CE = G$, eritque $\frac{(4C - Dp)^2}{4(1 + p^2)} = G - 4Cx + Dy$;

hinc $(1 + p^2) = \frac{(4C - Dp)^2}{4(G - 4Cx - Dy)}$.

Et quoniam $\partial s^2 = \partial x^2 (1 + p^2)$, erit $\partial s = \frac{C\partial x - Dp\partial x}{2\sqrt{(G - Cx + Dy)}}$.

id est, ob $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, $\partial s = \frac{C\partial x - D\partial y}{2\sqrt{(G - Cx + Dy)}}$; hinc integrando, $s = -\sqrt{(G - Cx + Dy)}$. Nam constans arbitraria, quae ex hac integratione oritur, quoniam coördinatarum originem posuimus in puncto O, nullum habet valorem.

Quodsi ex *Cycloïdis* transformata aequatione quaeratur longitudinis functio, similem obtinemus valorem (10). Ergo curva, quae dicta minimi proprietate gaudet est *Cycloïs*.

Termini quae in aequatione primitiva, nimirum in aequatione $\delta . \int v \partial x = v\delta x +$ caet., extra integralem, ad limites pertinent, sunt:

$$v\delta x + \omega \left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} . Q; \text{ id est, } v\delta x + \delta y \left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - p\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\partial x$$
$$+ \delta . \frac{\partial y}{\partial x} . Q - \frac{\delta x}{\partial x} \delta . p . Q; \text{ id est, } \frac{(1 + p^2)^2}{q} \delta x + \frac{1}{q^3} . [4pq(1 + p^2)$$
$$(q\partial x + \partial p) - 2(1 + p^2)^2 \partial q] \frac{\delta y}{\partial x} - \frac{p}{q^3} [4pq(1 + p^2)(q\partial x + \partial p) -$$
$$2(1 + p^2)^2 \partial q] \frac{\delta x}{\partial x} + \left(\frac{(1 + p^2)^2 \delta x}{q^2 \partial x} - \frac{(1 + p^2)^2}{q^2}\right) \delta . \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \ldots\ldots (\mu)$$

haec aequatio, si ad limites referatur, inservire debet ad determinandas tres constantes arbitrarias C, D et G, ex integrationibus ortas.

Ex aequatione $$G - 4Cx + Dy = \frac{(4C - Cp)^2}{4(1 + p^2)},$$

facile deducitur valor ipsius $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, et hinc etiam invenitur q: quod si curva coacta sit transire per tria puncta quorum coördinatae sunt determinatae, ex illis valoribus invenitur quid fiant p et q in illis punctis; tum si ex superiori aequatione (μ) formetur aequatio ad limites (δ), (vid. N°. 5.), atque in hac aequatione (δ) substituantur valores inventi p et q, habemus, quoniam in fixis limitibus $\delta x = 0$, $\delta y = 0$ et $\delta . \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, tres aequationes, ex quibus, uti in primo exemplo, facile inveniuntur constantes C, D et G, quibus *Cycloïs*, positione prorsus determinatur. Non autem hunc calculum instituemus, quoniam nimis longus est. Ad minimi praesentiam indicandam, oportet, ut sit

(10) Vid. Cousin, op. cit. Tom. I. pag. 261.

sit $\int \delta^2 v \partial x$ positiva; est autem,

$$v = \frac{(1 + p^2)^2}{q},$$

et quoniam in hac aequatione insunt p et q, quorum autem p pendet a q, nostro scopo sufficit, si $\frac{\delta^2 v}{\delta q^2}$ fiat positiva; est autem,

$$\frac{\delta v}{\delta q} = - \frac{(1 + p^2)^2}{q^2}; \frac{\delta^2 v}{\delta q^2} = + \frac{2q(1 + p^2)^2}{q^4},$$

quae cum sit positiva, erit et $\int \frac{\delta^2 v}{\delta q^2} \cdot \partial x = \int \frac{2q(1 + p^2)^2}{q^4} \cdot \partial x$ positiva: quapropter minimum dictum locum habebit.

11. EXEMPLUM 3. *Invenire curvam, in qua sit valor hujus formulae* $\int q^n \partial x$, *maximus vel minimus?* (11).

In hac formula igitur est $v = q^n$, ergo $\partial v = nq^{n-1}\partial q$; quare

$$M = 0, N = 0, P = 0, Q = nq^{n-1}, R = 0 \text{ caet.}$$

erit igitur $\delta \int v \partial x = v \delta x - \omega \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot Q + \int \omega \partial x \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)$,

igitur cum $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0$, erit $\partial Q = a \partial x$, $Q = nq^{n-1} = ax + b$; hinc $q = \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{ax+b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$,

sive $\partial p = \left(\frac{ax+b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \partial x$; hinc primis calculi Integralis regulis invenitur,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p = \frac{n}{n-1}\left(\frac{ax+b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + c; \; y = \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-1}\left(\frac{ax+b}{n}\right)^{\frac{2n-1}{n-1}} + cx + d,$$

quae est curvae aequatio, ita proponenda, $y = (Ax + B)^{\frac{2n-1}{n-1}} + cx + d$.

Curvae figura et ordo pendebit igitur a valore ipsius n.

Si v. g. $n = 2$, erit $y = (Ax + b)^{\frac{3}{1}} + cx + d$,

quae inter curvas nequidem est adnumeranda; pro $n = 2, 3$, caet. curvae omnes fient algebraïcae. Si fuerit $n = \frac{1}{2}$, esset,

$$\partial y = -1\left(\frac{ax+b}{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot \partial x + c\partial x; \; y = \frac{1}{a} \, Log. \, 2(ax + b) + cx + d,$$

quae curva, propter $Log. (ax + b)$, erit transcendentalis; reliquae autem formae, quas induet aequatio pro valoribus negativis et fractis ipsius n, erunt semper algebraïcae.

Aequatio ad limites hujusmodi est,

$$q^n \delta x - \omega \cdot \frac{\partial \cdot nq^{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} nq^{n-1} = 0; \text{ id est, ob } \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = r,$$

$q^n \delta x$

(11) Vid. Eulerus, op. cit. pag. 69. Exemp. V.

$$q^n \delta x - n(n-1)\, q^{n-2} r \delta y + n(n-1)\, q^{n-2} r p \delta x + n q^{n-1} \frac{\delta \partial y}{\partial x} - n q^{n-1} \delta x \,.\, \delta \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Sit *v. c.* curva coacta per quatuor puncta, positione data, transire; ex aequatione,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{ax+b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + c,$$

invenitur, quid fiant $\frac{\partial y}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r$, in tribus talibus curvae punctis, et quum aequatio ad limites tres contineat variationes, quae in illis punctis nullae sunt, nimirum δx, δy, $\delta \,.\, \frac{\partial y}{\partial x}$, ex illis aequationibus tres arbitrariae constantes inveniuntur. His substitutis in aequatione,

$$y = (Ax + B)^{\frac{2n-1}{n-1}} + cx + d,$$

si quarti puncti coördinatarum valores in hac ipsa aequatione ponantur, obtinemus quartam arbitrariam constantem, et hâc curva omnino determinatur.

Si puncta data in directum essent posita, mutaretur curva quaesita in lineam rectam, cujus aequatio est $y = cx + d$.

Ad maximum et minimum distinguendum habemus,

$$\delta v = n q^{n-1} \delta q;\ \delta^2 v = n(n-1)\, q^{n-2} \delta q^2,$$

ergo $$\frac{\delta^2 v}{\delta q^2} = n(n-1)\, q^{n-2};\ \int \frac{\delta^2 v}{\delta q^2} \,.\, \partial x = \int n(n-1)\, q^{n-2}\, \partial x.$$

Num haec quantitas sit positiva aut negativa, ex valore positivo aut negativo ipsius n dijudicari debet: v. c. si n sit numerus positivus integer, major quam 1, aut fractio negativa, erit semper $\int n(n-1)\, q^{n-2}\, \partial x$ positiva: si autem n sit numerus fractus positivus, erit $\int n(n-1)\, q^{n-2}\, \partial x$, semper negativa: ergo primo casu aderit minimum, altero casu maximum.

12. Haec exempla jam sufficiant, ad illustrandam expositam theoriam Integralium indefinitarum. Plura exempla proferre opus non censeo, quoniam eodem modo resolvi possunt; quo autem superior fiat gradus aequationis differentialis finalis, eo etiam impeditior solutio fit, et plerumque magna opus est sagacitate, et ingeniosa requiruntur calculi artificia, ad aequationes tales tractandas, earumque constantes arbitrarias determinandas.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONIS INTEGRALIS INDETERMINATAE $\int v \partial x$, CUM IN FUNCTIONE v NON MODO CONTINENTUR VARIABILES QUANTITATES, x, y, $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, CAET., SED ETIAM ALIAE INTEGRALES INDETERMINATAE.

1. Consideratio formularum Integralium, sponte admittit casum etiam generaliorem, quo functio v non est functio ipsarum x, y, p, q, caet. sed et hujus functionis $V = \int V' \partial x$, in qua V' etiam est functio quantitatum x, y, z, p caet. Tum igitur functio v pendet ab alia integrali indeterminata; sed hicce casus simplex etiam est, quandoquidem fieri potest, ut ipsa v, a quampluribus integralibus indeterminatis functionibus pendeat: et quamquam de talibus functionibus tractare, ob summas difficultates, non constituerim; tamen, ut hujus rei notitio percipiatur aliqua, breviter de illis quaedam adumbrare liceat.

2. Sit igitur $V = \int V' \partial x$, ita ut $\partial V' = M' \partial x + N' \partial y + P' \partial p$ caet.; sit denique $\partial v = M \partial x + N \partial y + P \partial p + L \partial V$, ac ponatur $\omega = \delta y - p \delta x$; porro sit $\int L \partial x$ intra limites totius integralis propositae $= I$, et habemus hanc formulam, quae indicat variationem functionis indeterminatae $\int v \partial x$, posito v continere et aliam functionem integralem, ipsamque esse duarum variabilium quantitatum:

$$\delta \int v \partial x = v \delta x + \omega \left(P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \text{caet.}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \text{caet.}\right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$
$$\left(R - \frac{\partial S}{\partial x} + \text{caet.}\right) + \text{caet.} + \int \omega \partial x \left(N - \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \text{caet.}\right) +$$
$$\omega \left(IP' - IP' + \frac{\partial IQ' - I \partial Q'}{\partial x} + \frac{I \partial^2 R' - \partial^2 IR'}{\partial x^2} + \text{caet.}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x}\left(\frac{\partial IR' - I \partial R'}{\partial x} - \text{caet.}\right) + \text{caet.}$$
$$+ I \int \omega . \partial x \left(N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \text{caet.}\right) - \int \omega \partial x \left(IN' - \frac{\partial IP'}{\partial x} + \frac{\partial^2 IQ'}{\partial x^2} + \text{caet.}\right) \text{ 1)} \ldots (2)$$

In hac generali formula tres integrales occurrunt; ut autem ad eandem integralem reducantur, fiat $\int L \partial x = I$, post integrationem intra limites, $= A$, erit A quantitas constans, et

I $\int$

(1) Vid. La Croix op. cit. Tom. II. § 854. pag. 769 sqq.

$$I \int \left(N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \text{caet.} \right) = \int A \left(N' - \frac{\partial P'}{\partial x} \text{ caet.} \right);$$

ergo si nunc tres illae integrales ad unam referantur, habemus,

$$\delta \int v \partial x = v \delta x + \omega \left(P - \frac{\partial [Q + (A-1) Q']}{\partial x} + \frac{\partial^2 [R + (A-1) R']}{\partial x^2} - \text{caet.} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \left(Q - \frac{\partial . [R - (A-1) R']}{\partial x} + \text{caet.} \right) + \text{caet.} + \int \omega \partial x \left([N - (A-1) N'] - \frac{\partial [P + (A-1) P']}{\partial x} + \frac{\partial^2 [Q + (A-1) Q']}{\partial x^2} + \text{caet.} \right) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

si igitur functio proposita maximum aut minimum fieri debeat, necesse est, ut terminus, sub integrali charactere, zero aequalis ponatur: qua ratione habemus aequationem differentialem determinatam, cujus integratio nobis praebebit functionem, quae dictâ proprietate gaudet, et cujus constantes arbitrariae determinantur ope terminorum, extra integrale signum, qui ad limites pertinent, simili ratione ac in Cap. I.

3. Attamen, quamquam hoc loco eadem praecepta valeant, quae de simplici functione $\int v \partial x$, tradita sunt, tamen plerumque multis iisque magnis difficultatibus implicamur, ad has aequationes tractandas, quare sequens generale exemplum sufficiat, ad aequationem (2) parum illustrandam.

4. *Sit in genere, $\int \partial x \, V(1 + p^2)$ arcus lineae curvae, et sit v functio hujus arcus, ita ut*

$$v = L \int \partial x \, V(1 + p^2),$$

in qua L est functio ipsarum x, y; rogatur invenire curvam, in qua, posito $x = a$, fiat

$$\int v \partial x = \int L \partial x \int V(1 + p^2) \partial x,$$

maximum aut minimum? (a)

Est igitur, si hanc aequationem cum generali formula (2) comparemus,

$V = \int \partial x \, V(1 + p^2)$; $V' = V(1 + p^2)$; $v = L \partial V = L \partial x \, V(1 + p^2)$;

fietque in limite altero post integrationem, id est ubi $x = a$, $\int L \partial x = A$.

Porro erit $$\partial V' = \frac{p \partial p}{V(1 + p^2)}.$$

Ergo $M = o$, $N = o$, $P = o$, caet. $M' = o$, $N' = o$, $P' = \frac{p}{V(1 + p^2)}$; $Q' = o$, caet.

erit igitur: $$\delta \int v \partial x = v \delta x + \int \omega \partial x \left(- \frac{\partial (A - 1) P'}{\partial x} \right),$$

pro maximo et minimo erit igitur $$- \frac{\partial (A - 1) P'}{\partial x} = o,$$

id est, substituto $P' = \frac{p}{V(1 + p^2)}$, et $I = \int L \partial x$,

— ∂.

(a) Cf. Eulerus, pag. 94. Exempl. II.

$$- \partial \cdot \frac{p}{\partial x \sqrt{(1+p^2)}} \cdot (A - \int L \partial x) = 0,$$

id est, c denotante constantem quantitatem,

$$c = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} \cdot (A - \int L \partial x); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

functio $L \partial x = \partial . I$ integrari debet, intra duos limites, ab $x = 0$, usque ad $x = a$, sed cum hoc idem sit ac si functio $L \partial x$ integraretur in limite $x = a$, fiet $\int L \partial x = A$, et aequatio (α) fit,

$$c = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} (A - A) = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} \times 0 = 0,$$

igitur etiam $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0$; id est, $p = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$,

ex qua invenitur $y = bx$, quae est aequatio lineae rectae, parallelae axi abscissarum; cujus justa positio, ope constantis b, ex aequatione

$$\nu \partial x'' - \nu \partial x' = 0,$$

ad limites, determinatur. Hae autem investigationes, uti et judicum maximi aut minimi, pendent a forma determinata ipsius functionis L.

Si *v. c.* daretur haec functio, $\int \nu \partial x = \int y \partial x \int \partial x \sqrt{(1 + p^2)}$, esset in exemplo praecedenti $L = y$; $L \partial x = y \partial x$, denotat aream lineae curvae; ergo si dati sint limites, intra quos integralis functio cadit, integrari oportet formula $y \partial x$, intra illos limites; id est, hoc casu A erit area lineae curvae, intra illos limites. Aequationes autem differentiales, quae ad hujus simplicis functionis integrationem conducunt, ita fiunt implicatae, ut vix, ac ne vix quidem, possint resolvi (3).

5. Considerationes aliarum functionum indeterminatarum, veluti earum, in quibus quamplures occurrunt integrales, aut quae forma sunt implicatiores (veluti sunt functiones $\int \frac{\int V \partial x}{\int \nu \partial x}$; $\int V \partial x^{\int \nu \partial x}$ caeteraque,) transibo, quandoquidem ejusmodi sunt, quarum dilucida ac accurata explicatio, si non nimis longa, at certe difficilior est, quam ut a me omni perspicuitate proponatur.

(3) Cf. Eulerus op. cit. Exemp. II. pag. 101.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

DE MAXIMIS ET MINIMIS RELATIVIS.

1. Quum igitur de functionibus integralibus indeterminatis, unum alterumque dixerim, abesse non possum, quin et verbo moneam, quamnam habent applicationem in quaestionibus de *maximis* et *minimis relativis*.

In quaestionibus enim supra allatis, in genere rogabatur functio, quae hanc illamve maximi minimive proprietatem haberet; sed, ut de curvis tantum dicamus, quaeri potest, inter omnes curvas, quae eandem habent communem proprietatem, eam invenire quae gaudet aliquo maximo aut minimo. Rogetur v. c. *curvam invenire, quae inter omnes curvas ejusdem longitudinis, habeat maximam aut minimam aream?*

Tum maximi minimive proprietas non est absoluta, sed relativa: attamen ea, quae supra de functionibus indeterminatis dicta sunt, etiam valent, ad tales quaestiones solvendas.

In exemplo proposito perimeter curvae invenitur functione $\int \partial x \sqrt{(1+p^2)}$: area autem hâc determinatur $\int y \partial x$; ergo quaestio haec erit: *invenire curvam, in qua valor functionis $\int y \partial x$ maximum aut minimum attingat, ita ut etiam in illa curva haec functio $\int \partial x \sqrt{(1+p^2)}$ constantem habeat valorem* A. In maximi et minimi absoluti determinatione esset $\delta \int y \partial x = 0$; sed nostro casu variatio illius functionis tum demum zero fieri potest, cum ejusmodi sit constituta, ut in ea contineatur dicta proprietas, nimirum ut $\int \partial x \sqrt{(1+p^2)}$, constantem valorem habeat; hoc autem generali modo ita proponi potest,

$$\delta \int [y \partial x + a \partial x \sqrt{(1+p^2)}] = 0,$$

in qua a est quantitas constans indeterminata; namque ad scopum pervenitur, si ex data proprietate $\int \partial x \sqrt{(1+p^2)} = \mathrm{A}$, ea hauriantur elementa quae in functione $y \partial x$ incognita sunt, quae, si in hâc functione substituantur, praebent functionem, in qua dicta proprietas continetur, cujus variatio igitur si nihilo aequalis ponatur, habetur aequatio differentialis, ex cujus integratione, curva quaesita innotescet: sed cum talis operatio, valde sit difficilis, eam ob causam $\int \partial x \sqrt{(1+p^2)}$ jungitur functioni $y \partial x$ et multiplicatur per constantem indeterminatam, quae si determinata esset, ita cogitari debet, ut functio,

$$y \partial x + a \partial x \sqrt{(1+p^2)},$$

eundem praebeat valorem, ac si unica functio, dicto modo, esset inventa, quae datam pro-

proprietatem contineret. Ergo de resolutione maximorum et minimorum relativorum, haec valet *Regula*.

2. *Sit* $\int v \partial x$ *functio, quae maximum valorem attingere debet*, $\int V \partial x$ *alia functio, continens proprietatem, quam in omnibus functionibus* $\int V \partial x$ *communem esse oportet; invenietur maximum aut minimum rogatum, si investigetur maximum aut minimum hujus functionis*,

$$\int (v \partial x + a V \partial x),$$

a notante quantitatem indeterminatam, quae postea constituitur, simul cum arbitrariis constantibus, ex integratione ortis (1).

Ergo talium problematum resolutioni, nullae insunt aliae difficultates, nisi illae, quae insunt in tractatione functionum Integralium indeterminatarum; quum ea resolutio reducta sit ad maximi minimive indagationem unicae functionis indeterminatae, quae semper est ex genere earum, de quibus supra Cap. I et II monuimus.

3. Quaestiones de maximis et minimis relativis vel maxime celebratae sunt. Vocantur et plerumque *problemata Isoperimetrica*. In illis, ante calculi variationum inventionem, multum operis impendit Jacobus Bernouillius, qui primus talia problemata proposuisse videtur, et simul cum Jano fratre, ad hujus calculi inventionem ansam dedit (2). Eulerus in suo citato opere, amplum dedit tractatum, de maximis et minimis relativis. Multae praeterea, de hoc genere maximorum et minimorum, inveniuntur, in diversis commentariis, qui in *Novis Actis Petropolitanis* inserti sunt. Summus denique Lagrange et hâc theoria usus est, ad Mechanices problemata, ita invisenda, ut eorum solutio penderet a sola determinatione maximi aut minimi relativi (3).

4. Ut autem, quae dicta sunt, meliori luce intueantur, sequens inserviat problema.

Inter omnes curvas, ejusdem longitudinis, eam determinare, quae in ejus revolutione circa axim, generet maximam aut minimam superficiem (4)?

Proprietas omnibus curvis communis, haec est $\int \partial x \sqrt{(1 + p^2)} = A$, et hujus proprietatis habita ratione, functio superficiei,

$$2\pi \int y \partial x \sqrt{(1 + p^2)} \ (5),$$

maximum aut minimum evadere debet. Habemus igitur,

$$\delta . \int \partial x \, [2y\pi \sqrt{(1 + p^2)} + a \sqrt{(1 + p^2)}] = 0,$$

id

(1) Demonstratio Analytica hujus regulae invenitur apud La Croix op. cit. Tom. II. § 873. pag. 802. Cousin op. cit. Tom. I. § 61. pag. 359. Haec ratio convenit cum illa quam tradit Lagrange sub nomine *Methode des Multiplicateurs*, vid. ejus *Mec. Anal.*, Sect. IV. § I. pag. 74.

(2) Cf. Montucla op. cit. Tom. III. pag. 353.

(3) Vid. ejus *Mec. Anal.*, Tom. I. Part. I. Sect. IV. § III. No. 28. pag. 95.

(4) Vid. Cousin op. cit. Tom. I. pag. 360.

(5) Vid. Cl. de Gelder, *Differ. Rek.*, §. 83. pag. 214. form. (*r*).

id est, comparatione instituta cum formula (1) Cap. I. N°. 4,

$$v=(y+a)\cdot\sqrt{(1+p^2)};\ \partial v=\partial y\sqrt{(1+p^2)}+y\cdot\frac{p\partial p}{\sqrt{(1+p^2)}}+a\cdot\frac{p\partial p}{\sqrt{(1+p^2)}}.$$

Ergo $M=0$; $N=\sqrt{(1+p^2)}$; $P=(y+a)\cdot\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$; $Q=0$; $R=0$ caet., fiet igitur generalis illa formula, hujusmodi:

$$\delta\int v\partial x=(y+a)\cdot\sqrt{(1+p^2)}\,\delta x\,.+\omega\cdot(y+a)\cdot\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}+$$
$$\int\omega\partial x\left(\sqrt{(1+p^2)}-\frac{1}{\partial x}\partial\cdot\frac{(y+a)p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right).$$

Ergo: $$\partial x\sqrt{(1+p^2)}-\partial\cdot\frac{(y+a)p}{\sqrt{(1+p^2)}}=0,$$

est autem $\partial\cdot\frac{(y+a)p}{\sqrt{(1+p^2)}}=\frac{p\partial y}{\sqrt{(1+p^2)}}+(y+a)\cdot\partial\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$; eritque

$$\partial x\sqrt{(1+p^2)}-(a+y)\cdot\partial\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)-\frac{p\partial y}{\sqrt{(1+p^2)}}=0.$$

Sed $\partial y=p\partial x$, hinc $\partial x\sqrt{(1+p^2)}-(a+y)\partial\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)-\frac{p^2\partial x}{\sqrt{(1+p^2)}}=0$, et, dividendo per $(a+y)$, multiplicando per $p\sqrt{(1+p^2)}$,

$$\frac{p\partial x}{(a+y)}-p\sqrt{(1+p^2)}\partial\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)=0;\ \text{sive}\ \frac{\partial y}{a+y}-p\sqrt{(1+p^2)}\partial\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)=0,$$

fac $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=z$, erit $z^2(1+p^2)=p^2=z^2+p^2z^2$; $(1-z^2)p^2=z^2$; $p^2=\frac{z^2}{1-z^2}$,

$p=\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}}$; $(1+p^2)=\frac{1}{1-z^2}$; $\sqrt{(1+p^2)}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}$; $p\sqrt{(1+p^2)}=\frac{z}{1-z^2}$.

Ergo $$p\sqrt{(1+p^2)}\cdot\partial\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)=\frac{z\partial z}{1-z^2},$$

formula praecedens, facta subsitutione, erit

$$\frac{\partial y}{a+y}-\frac{z\partial z}{1-z^2}=0.$$

Integrando, $Log.\,(a+y)+\frac{1}{2}Log.\,(1-z^2)+c=0$, sive cum arbitraria constans c omnes formas possit induere,

$$Log.\,(a+y)+\tfrac{1}{2}Log.\,(1-z^2)=Log.\,b.$$

Unde $Log.\,(a+y)\sqrt{(1-z^2)}=Log.\,b$; id est, $(a+y)\sqrt{(1-z^2)}=b$.

Est autem $\sqrt{(1-z^2)}=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}$; ergo

$$(a+y)^2=b^2(1+p^2);\ (a+y)^2=b^2\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right];$$

$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{(a+y)^2 - b^2}{b^2};\ \partial x = \frac{b\,\partial y}{\sqrt{[(a+y)^2 - b^2]}},$$

cujus integralis est, $x = c - b\ Log.\ Nep.\ [(a+y) + \sqrt{((a+y)^2 - b^2)}]$.

Haec est aequatio curvae quaesitae, quae curva est *catenaria* (6). Si catena ex punctis duobus A et B suspendatur, formatur, gravitatis actione, curva linea, quae *catenaria* dicitur. Sit igitur *Fig.* 27, ACB illa curva, generabitur maximam aut minimam superficiem, si haec catenaria circa axim AB aut CD rotetur. Si C sit origo coördinatarum, et ponatur CQ $= y$, PQ $= x$, erit aequatio catenariae:

$$x = b\ .\ Log.\ Nep.\ [y + \sqrt{(y^2 - b^2)}].$$

Ergo in nostro casu omnes ordinatae y auctae sunt constanti quantitate a. Si igitur a puncto C sumatur EC $= a$, erit nostro casu E coördinatarum origo; ergo cum in illa origine $x = 0$, et $y = 0$, erit $0 = c - b\ Log.\ Nep.\ [a + \sqrt{(a^2 - b^2)}]$, ergo $c = b\ Log.\ Nep.\ [a + \sqrt{(a^2 - b^2)}]$; hinc justa aequatio erit:

$$x = b\ Log.\ Nep.\ [a + \sqrt{(a^2 - b^2)}] - b\ Log.\ Nep.\ ((a+y) + \sqrt{[(a+y)^2 - b^2]}),$$

$$\text{sive}\quad x = b\ Log.\ Nep.\ \left(\frac{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + y + \sqrt{[(a+y)^2 - b^2]}}\right).$$

Quantitas b denotat tensionem horizontalem constantem in omnibus curvae punctis; haec autem tensio cum a catenae pondere pendeat in nostro exemplo indeterminata manet.

Quantitas a determinatur vel ex data positione punctorum A et B, ope aequationum ad limites, secuti in antecedentibus exemplis fecimus, vel ex data catenae longitudinis aequatione. Etenim inventa aequatio

$$\partial x^2 = \frac{b^2\,\partial y^2}{[(a+y)^2 - b^2]},$$

praebet, si s denotet longitudinem illam,

$$\partial x^2(1+p^2) = \partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2 = \frac{(a+y)^2\,\partial y^2}{[(a+y)^2 - b^2]}.\ \text{Ergo}\ \partial s = \frac{(a+y)\,\partial y}{\sqrt{[(a+y)^2 - b^2]}},$$

et cum longitudo detur $=$ A, erit $s = \int \partial x \sqrt{(1+p^2)} = \int \frac{(a+y)\,\partial y}{\sqrt{[(a+y)^2 - b^2]}} = A$.

Sed $\int \frac{(a+y)\,\partial y}{\sqrt{[(a+y)^2 - b^2]}} = \sqrt{[(a+y)^2 - b^2]}$; ergo, $\sqrt{[(a+y)^2 - b^2]} = A$.

Jam vero si puncta A et B positione sint data, (si v. c. eorum distantia detur $= d$,) cum $\frac{(a+y)\,\partial y}{\sqrt{[(a+y)^2 - b^2]}}$ integrari debet ab $y = 0$, usque ad $y =$ BD $= \frac{1}{2} d$, erit integra longitudo BCA,

A = 2

(6) Vid. *Grondbeg. der Werkt. door* J. Blassiere, *gevolgd naar de werken van* Bossut et La Caille, § 408. pag. 144.

$$A = 2\sqrt{[(a + \tfrac{1}{2}d)^2 - b^2]},$$

unde facile habetur valor ipsius a.

5. Ex hoc exemplo, evidenter apparet, quomodo aliae ejusdem generis quaestiones possunt resolvi, et quomodo quantitas indeterminata a post curvae genus inventum, invenitur. Plura exempla adferre inutile censeo, quoniam eorum solutiones, semper cadunt sub resolutione functionum Integralium indeterminatarum in Cap. I et II tractarum, et de quibus eo loco satis diximus.

Et jam, VIRI CLARISSIMI! commentationi finem imponere possum. Absolvi enim quod mihi proposueram. In duas partes meam commentationem distribui: in utriusque elaboratione feci quod valui: itaque fore, ut vobis placeam nec frustra coner, etiam atque etiam spero: sin autem in parte prima felicius elaboraverim quam in altera, ipsius argumenti naturae tribuatis: hujus enim partis materiam non ejusmodi esse, quae a juvene, a tirone, omni perspicuitate et elegantia exponatur et illustretur, ex animo confiteor.

Cum vero nescirem, ut jam supra monui, an haec etiam pars ad quaestionem propositam solvendam, postularetur; eam tamen meae commentationi adjicere, quam praetermittere malui.. Nec tamen, hujus quamquam inscius, et bene meae tenuitatis in hac theoria conscius, temere fecisse opinor; haud enim immemor fui *sententiae Ciceronianae*, quam hic, symboli instar, subscribere liceat.

Quod est, eo decet uti: sed quidquid agas, agere pro viribus.

De Senectute, Cap. IX, initio.

E R R A T A.

Pag. 1.	lin. 2.	BATAVUS,	*leg.* BATAVI,
— 9.	— 22.	haec aequatio	— hic valor ipsius y
— 11.	— 15.	habet,	— habet;
— 26.	— 4.	$a + \sqrt[3]{a} \cdot i^2$.	— $a + \sqrt[3]{a} \cdot i^2$;
— 41.	— 8.	sint nostro Logarithmi casu	— nostro casu Logarithmi sint
— 41.	— 18.	etenim ita	— namque tam
— 41.	— 27.	soliditatam,	— soliditatem,
— 42.	— 29.	nt	— ut
— 43.	— 8.	nec ne,	— nec ne;
— 43.	— 18.	aequales	— aequalis
— 46.	— 10.	rationem	— ratio
— 49.	— 2.	habeat	— habet
— 65.	— 32.	*linneis*	— *lineis*
— 80.	— 11.	positivum	— positiva
— 80.	— 12.	negativum	— negativa

…inique… …ynécologique

…Daels,

…ECTORAT.